ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В.Бойков, Н.Ф. Добрынина

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ АДАМАРА

Учебное пособие

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
Университета
2007

УДК 517.392
Б77

Р е ц е н з е н т ы:

Кафедра «Информатика и вычислительная техника»
Пензенского государственного педагогического университета
им. В.Г.Белинского

Кандидат физико-математических наук, доцент,
Заведующий кафедрой «Алгебра»
Пензенского государственного педагогического университета
им. В.Г. Белинского

А.А. Ловков

Бойков, И.В.

Б77 Приближенные методы вычисления интегралов Адамара: учеб. пособие / И.В. Бойков, Н.Ф. Добрынина. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. -108с. – Библиогр.: с. 100-104.

Излагаются приближенные методы вычисления одномерных и многомерных интегралов в смысле Адамара на различных классах функций. Большое внимание уделяется построению асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку методов. Рассмотрены приближенные методы решения интегральных уравнений с интегралами в смысле Адамара.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначено для студентов специальности «Прикладная математика».

УДК 517. 392

Предисловие

Учебное пособие состоит из трех глав.

Первая глава включает четыре раздела. В первом разделе дается определение интеграла Адамара и отмечается связь вычисления интегралов по Адамару с другими методами регуляризации. Во втором и третьем разделах приводятся определения оптимальных алгоритмов вычисления интегралов Адамара и классы функций. В четвертом разделе описываются задачи, приводящие к интегралам Адамара и к интегральным уравнениям с этими интегралами. Дан обзор работ по приближенным методам вычисления интегралов Адамара и численным методам решения интегральных уравнений с этими интегралами.

Вторая глава посвящена построению асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку алгоритмов вычисления одномерных интегралов Адамара. Построены асимптотически оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов Адамара с фиксированной особенностью и оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления интегралов с переменной сингулярностью. Большое внимание уделяется построению алгоритмов, которые не являются оптимальными, но очень эффективны при практической реализации.

В третьей главе дан анализ асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку алгоритмов вычисления многомерных интегралов Адамара. Построены асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления интегралов Адамара с периодическими ядрами и оптимальные по порядку алгоритмы их вычисления на классах Гельдера и Соболева. Построены просто реализуемые на практике алгоритмы с достаточно высокой точностью.

Введение

Решение задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа привело Ж.Адамара к введению сингулярных интегралов особого вида [1]. Позднее они получили название интегралов в смысле Адамара, или интегралов Адамара. Кроме уравнений гиперболического типа, интегралы Адамара находят широкое применение в теории упругости, электродинамике, аэродинамике [5,6,75] и ряде других важных областей механики и математической физики. Точное вычисление интегралов Адамара возможно только в исключительных случаях, поэтому возникает необходимость в разработке приближенных методов вычисления.

В последние десять-пятнадцать лет отмечается устойчивое возрастание интереса к проблематике, связанной с применением интегралов Адамара, а в связи с этим и к задачам вычисления интегралов Адамара и приближенного решения интегральных уравнений с интегралами Адамара.

В предлагаемой книге сделана попытка отразить современное состояние методов вычисления интегралов Адамара и приближенного решения уравнений с интегралами Адамара.

Г Л А В А 1

Определение и методы вычисления гиперсингулярного интеграла Адамара

1.1. Интеграл Адамара

В работе [1] Ж.Адамар ввел новый тип особых интегралов.

Определение 1.1.1. [1]. Интеграл вида

$$\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}} \qquad (1.1.1)$$

при целом p и $0<\alpha<1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла:

1) как половину соответствующего интеграла вдоль контура $[a,b]$;
2) как предел при $x \to b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t)\,dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}},$$

если предположить, что $A(x)$ имеет p производных в окрестности точки b. Здесь $B(x)$ - любая функция, на которую налагаются два условия:

а) рассматриваемый предел существует;
б) $B(x)$ имеет по крайней мере p производных в окрестности точки $x=b.$

Произвольный выбор $B(x)$ никак не влияет на значение получаемого предела: условие а) определяет значения $p-1$ первых производных от $B(x)$ в точке b, так что произвольный добавочный член в числителе есть бесконечно малая величина, по меньшей мере порядка $(b-x)^p$.

Ж. Адамар назвал этот предел «конечной частью» интеграла и обозначил

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}\right. .$$

Знак $\left|\overline{}\right.$ означает конечную часть интеграла.

Один из способов вычисления интеграла Адамара заключается в следующем. Представим интеграл (1.1.1) в виде

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}\right. = \int_a^b \frac{A_1(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}} +$$

$$+\left|\overline{\int_a^b \left[A(b)+\frac{A'(b)}{1!}(x-b)+\ldots+\frac{A^{(p-1)}(b)(x-b)^{p-1}}{(p-1)!}\right]\frac{dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}\right., \qquad (1.1.2)$$

где $A_1(x)=A(x)-A(b)-\frac{A'(b)}{1!}(x-b)-\ldots-\frac{A^{(p-1)}(b)(x-b)^{p-1}}{(p-1)!}$.

Вычисляя второй из интегралов, стоящих в правой части формулы (1.1.2) по определению 1.1.1, в котором

$$B(x)=\frac{A(b)}{p+\alpha-1}-\frac{A'(b)(b-x)}{(p+\alpha-2)1!}+\ldots+\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)(b-x)^{p-1}}{\alpha(p-1)!},$$

имеем

$$\left|\overline{\int_a^b \frac{A(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}}\right. = -\frac{A(b)}{(p+\alpha-1)(b-a)^{p+\alpha-1}}-\ldots-\frac{(-1)^{p-1}A^{(p-1)}(b)}{(p-1)!\,\alpha(b-a)^{\alpha}}\bullet\int_a^b \frac{A_1(x)\,dx}{(b-x)^{p+\alpha}}.$$

Данное Адамаром определение конечной части расходящегося интеграла является частным случаем общего понятия регуляризации расходящихся интегралов.

Опишем регуляризацию расходящихся интегралов, следуя [17].

Определение 1.1.2. [17]. Множество K всех вещественных функций $\varphi(x)$ $\left(x=(x_1,x_2,\ldots x_n)\right)$, каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков, и финитна, т.е. обращается в нуль вне некоторой ограниченной области (своей для каждой функции $\varphi(x)$), называется основным пространством. Сами функции $\varphi(x)$ называются основными.

Определение 1.1.3. [17]. Линейный непрерывный функционал f задан на основном пространстве K, если указано правило, в силу которого каждой основной функции $\varphi(x)$ сопоставлено некоторое число (f,φ) и при этом выполнены следующие условия:

а) для любых двух вещественных чисел α_1,α_2 и любых двух основных функций $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ имеет место равенство

$$(f,\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)=\alpha_1(f,\varphi_1)+\alpha_2(f,\varphi_2);$$

б) если последовательность основных функций $\varphi_1,\ldots\varphi_n,\ldots$ стремится к нулю в пространстве K, то последовательность чисел $(f,\varphi_1),\ldots,(f,\varphi_n),\ldots$ сходится к нулю.

Если $f(x)$ локально интегрируемая в R_n, то с ее помощью можно каждой основной функции $\varphi(x)$ поставить в соответствие число

$$(f,\varphi)=\int\limits_{R_n} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.1.3}$$

Легко видеть, что выражение (1.1.3) является линейным функционалом. Известно, что не все линейные функционалы представимы в виде (1.1.3). Линейные функционалы, представимые в виде (1.1.3), называются регулярными, все остальные – сингулярными.

Пусть $f(x)$ - функция, локально интегрируемая всюду, кроме точки x_0. В этой точке она имеет неинтегрируемую особенность. Тогда интеграл (1.1.3), где $\varphi(x)$ - основная функция, вообще говоря, расходится. Но он сходится , если $\varphi(x)$ равна нулю в окрестности точки x_0. Ставится вопрос, нельзя ли доопределить возникающий при этом функционал, т.е. построить функционал $f \in K'$, который на основные функции $\varphi(x)$, равные нулю в окрестности точки x_0 действует по формуле (1.1.3). Всякий такой функционал f называется регуляризацией расходящегося интеграла (1.1.3) или регуляризацией функции $f(x)$.

Остановимся на проблеме регуляризации функции со степенными особенностями, поскольку интеграл в смысле Адамара введен для интегрирования таких функций.

Пусть $f(x)$ - функция со степенной особенностью в точке $x_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, причем функция $f(x) = r^m$ локально интегрируема. Здесь

$$r = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_k^0\right)^2\right]^{1/2}.$$

Для функций такого вида в монографии [17] предлагается следующая регуляризация степенных функций

$$(f,\varphi) = \int_{R_n} f(x)\left\{\varphi(x) - \left[\varphi(0) + \frac{\partial\varphi(0)}{\partial x_1}x_1 + \ldots + \frac{\partial^m\varphi(0)}{\partial x_n^m}\frac{x_n^m}{m!}\right]e(1-r)\right\}dx, \qquad (1.1.4)$$

где для простоты полагается, что особая точка $x_0 = 0$, функция

$$e(1-r) = \begin{cases} 1 \text{ } при \text{ } r < 1, \\ 0 \text{ } при \text{ } r = 1. \end{cases}$$

Сравнивая результаты регуляризации функции $f(x)$ со степенной особенностью, проведенной по формуле (1.1.4) при $n=1$, и результаты непосредственного вычисления интеграла Адамара по формуле (1.1.2), легко убедиться, что они отличаются на константу.

Теорема 1.1.1. [17] Если f_0- частное решение проблемы регуляризации интеграла (1.1.3), то общее решение f получается прибавлением к f_0 любого функционала, сосредоточенного в точке x_0.

Вопрос о выборе среди многочисленных регуляризаций данной функции естественной ее регуляризации обсуждается в первой главе монографии [17]. Мы не останавливаемся на этом вопросе, поскольку на протяжении всей работы рассматриваются только интегралы Адамара.

По этой же причине здесь не обсуждается вопрос о регуляризации функций со степенными особенностями аналитическим продолжением по параметру. Эта регуляризация подробно исследована в [17].

В работе [35] предложен интересный подход к регуляризации интегралов на бесконечных интервалах интегрирования. Рассмотрим интеграл

$$A\varphi=\int_0^\infty \varphi(\tau)\tau^{\lambda-2}d\tau,$$

где $1<\lambda<2$, а функция $\varphi(\tau)=\left(1-\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau}\right)^{-\mu}$, $\varphi_1(\tau)$- ограниченная функция, $\mu>0$.

Очевидно, что интеграл $A\varphi$ не существует в смысле Римана и необходимо проведение регуляризации.

Регуляризация интеграла $A\varphi$ проводится следующим образом. Вначале доказывается, что интеграл

$$\int_0^\infty \tau^\mu d\tau=0 \tag{1.1.5}$$

при любом μ. В самом деле

$$\int_0^\infty \tau^\mu d\tau = \int_0^a \tau^\mu d\tau + \int_a^\infty \tau^\mu d\tau. \tag{1.1.6}$$

При условии $\operatorname{Re}\mu > -1$ первый интеграл существует и равен $\dfrac{e^{\mu+1}}{\mu+1}$. Полученная функция является аналитической во всей комплексной плоскости, исключая точку $\mu = -1$. Второй интеграл существует при условии $\operatorname{Re}\mu < -1$ и равен $\dfrac{-e^{\mu+1}}{\mu+1}$. Он также является аналитической функцией во всей комплексной плоскости за исключением точки $\mu = -1$. Продолжая интегралы из правой части формулы (1.1.6) на всю комплексную плоскость, доказываем (1.1.5). Тогда регуляризация осуществляется формулой

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)\tau^{\lambda-2} d\tau = \int_0^\infty \left(\varphi(\tau) - 1\right)\tau^{\lambda-2} d\tau.$$

Нетрудно видеть, что последний интеграл существует. Аналогичным образом осуществляется переход к большим значениям λ.

В работе Л.А. Чикина [42] дано определение интеграла типа Коши-Адамара, обобщающее понятия интеграла в смысле главного значения Коши и интеграла Адамара.

Определение 1.1.4. [42]. Интегралом

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - c)^p}, \quad a < c < b,$$

в смысле главного значения Коши-Адамара будем называть следующий предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{\nu\to 0}\left[\int_a^{c-\nu} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+\nu}^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(\nu)}{(\tau-c)^{p-1}}\right],$$

где $\xi(\nu)$ - некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

1.2. Построение оптимальной квадратурной формулы

В 1958 году вышла книга С.М. Никольского «Квадратурные формулы», которая привлекла внимание математиков к построению оптимальных квадратурных формул. Различные подходы к построению оптимальных квадратурных формул предложены Н.С. Бахваловым [2], В.И. Крыловым [23], С.М.Никольским [34], С.Л. Соболевым [40]. Оптимальные весовые кубатурные формулы исследованы В.И.Половинкиным [35-39]. Оптимальные и асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов построены И.В. Бойковым [4-8].

Формулировка задачи построения оптимальных квадратурных формул принадлежит А.Н. Колмогорову и, в применении к интегралам Адамара, заключается в следующем. Рассмотрим интеграл

$$A\varphi = \int_a^b \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}, \quad p - целое, \qquad (1.2..1)$$

который будем вычислять по квадратурной формуле

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{N} \varphi(s_k)\, p_k(t) + R_N(t, s_k, p_k, \varphi) \qquad (1.2.2)$$

с узлами s_k и весами $p_k(t)\,(k = 1, 2, \ldots, N)$.

Под погрешностью квадратурной формулы (1.2.2) будем понимать величину

$$R_N(s_k, p_k, \varphi) = \max_t \left| R_N(t, s_k, p_k(t), \varphi) \right|.$$

Если M – некоторый класс заданных на отрезке $[a,b]$ функций, то положим

$$R_N(s_k, p_k, \mathrm{M}) = \sup_{\varphi \in \mathrm{M}} \left| R_N(s_k, p_k, \varphi) \right|.$$

Через $\xi_N[\mathrm{M}]$ обозначим величину

$$\xi_N[\mathrm{M}] = \inf_{(s_k, p_k)} R_N(s_k, p_k, \mathrm{M}),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным N узлам s_k и весам $p_k(t)\,(k = 1,2,\dots,N)$. Квадратурную формулу (1.2.2), построенную на узлах s_k^* и весах $p_k^*(t)\,(k = 1,2,\dots,N)$, будем, следуя [2] называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_N\left(s_k^*, p_k^*(t), \mathrm{M}\right)}{\xi_N[\mathrm{M}]} = 1,$$

$$\lim_{N \to \infty} \frac{R_N\left(s_k^*, p_k^*(t), \mathrm{M}\right)}{\xi_N[M]} = 1,$$

$$R_N\left(s_k^*, p_k^*(t), \mathrm{M}\right) \overset{\cup}{\underset{\cap}{}} \xi_N[\mathrm{M}],$$

соответственно. Знак $\overset{\cup}{\underset{\cap}{}}$ (слабая эквивалентность) означает, что имеются две константы A и B $(0 < A, B < \infty)$, не зависящие от N и такие, что

$$A\xi_N[\mathrm{M}] < R_N\left(s_k^*, p_k^*, \mathrm{M}\right) < B\xi_N[\mathrm{M}].$$

Постановку задачи в случае многомерных интегралов опишем на примере двойного интеграла следующего вида:

$$I\varphi=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}d\tau_1 d\tau_2. \qquad (1.2.3)$$

Для вычисления этого интеграла будем использовать кубатурные формулы вида

$$I\varphi=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}p_{kl}(t_1,t_2)\varphi(x_k,y_l)+R_{mn}(t_1,t_2,x_k,y_l;p_{kl},\varphi), \qquad (1.2.4)$$

определяемые вектором $(x,y):a_1\le x_1<x_2<\ldots<x_m\le b_1,\ a_2\le y_1<y_2<\ldots<y_n\le b_2$ и коэффициентами $p_{kl}(1\le k\le m, 1\le l\le n)$.

Под погрешностью кубатурной формулы (1.2.4) будем понимать величину

$$R_{mn}(x_k,y_l;p_{kl},\varphi)=\sup_{t_1,t_2}\left|R_{mn}(t_1,t_2;x_k,y_l;p_{kl},\varphi)\right|.$$

Если М - некоторый класс заданных на прямоугольнике $[a_1,b_1;a_2,b_2]$ функций, то положим

$$R_{mn}(x_k,y_l;p_{kl},\mathrm{M})=\sup_{\varphi\in\mathrm{M}}\left|R_{mn}(x_k,y_l;p_{kl},\varphi)\right|.$$

Через $\xi_{mn}[\mathrm{M}]$ обозначим величину

$$\xi_{mn}[\mathrm{M}]=\inf_{(x,y;p)}R_{mn}(x_k,y_l;p_{kl},\varphi),$$

в которой нижняя грань берется по всевозможным векторам $(x,y;p)$ узлов и весов $(k=1,2,\ldots,N; l=1,2,\ldots,M)$. Кубатурную формулу (1.2.4), построенную на векторах $(x_k^*,y_l^*;p_{kl}^*)$, будем, следуя [2], называть оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если

$$\frac{R_{mn}\left(x_k^*, y_l^*; p_{kl}^*, \mathrm{M}\right)}{\xi_{mn}\left[\mathrm{M}\right]} = 1,$$

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{R_{mn}\left(x_k^*, y_l^*; p_{kl}^*, \mathrm{M}\right)}{\xi_{mn}\left[\mathrm{M}\right]} = 1,$$

$$R_{mn}\left(x_k^*, y_l^*; p_{kl}^*, \mathrm{M}\right) \underset{\cap}{\cup} \xi_{mn}\left[\mathrm{M}\right].$$

Двойной интеграл (1.2.3) можно вычислить по кубатурной формуле

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{N} p_{kl}\left(t_1, t_2\right)\varphi\left(M_k\right) + R_k\left(t_1, t_2, M_k, p_k, \varphi\right), \tag{1.2.5}$$

использующей N значений подынтегральной функции. Здесь $M_k = \left(\varsigma_k, \eta_k\right)$ - узлы кубатурной формулы (1.2.5), причем характер расположения узлов в прямоугольнике $\left[a_1, b_1; a_2, b_2\right]$ произвольный.

Численные характеристики погрешностей определяются по формулам

$$R_N\left(M_k, p_k, \varphi\right) = \sup_{t_1, t_2}\left|R_N(t_1, t_2; M_k, p_k, \varphi)\right|$$

$$R_N\left(M_k; p_k, \mathrm{M}\right) = \sup_{\varphi\in\mathrm{M}} R_N\left(M_k, p_k, \mathrm{M}\right),$$

$$\xi_N\left[\mathrm{M}\right] = \inf_{\left(M_k, p_k, \mathrm{M}\right)} R_N\left(M_k, p_k, \mathrm{M}\right).$$

1.3. Основные классы интегрируемых функций

В книге С.М. Никольского [34] отмечается, что погрешность любой квадратурной формулы на всем классе интегрируемых функций равна бесконечности, и поэтому приходится проводить исследование квадратурных формул на узких классах функций. В этом параграфе описываются классы функций, на которых исследуются алгоритмы вычисления интегралов Адамара.

Класс $W^r(M;a,b)$ состоит из функций, заданных на отрезке $[a,b]$ непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r-го порядка, удовлетворяющую на этом отрезке неравенству $\left|f^{(r)}(x)\right| \le M$.

В современном анализе широко используется класс функций Гельдера $H_\alpha(M;a,b)$ $(0<\alpha\le 1)$, состоящий из заданных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого отрезка неравенству

$$\left|f(x')-f(x'')\right| \le M\left|x'-x''\right|^\alpha .$$

Через $W^r H_\alpha(M;a,b)$ $(r=1,2,\ldots;0<\alpha\le 1)$ обозначают класс функций $f(x)$, имеющих на отрезке $[a,b]$ производные r-го порядка, удовлетворяющие условию

$$\left|f^{(r)}(x')-f^{(r)}(x'')\right| \le M\left|x'-x''\right|^\alpha$$

при любых x',x'' на $[a,b]$.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана неубывающая функция $\omega(x)$, удовлетворяющая условиям

$$\omega(0)=0, \quad 0<\omega(x_2)-\omega(x_1)\le\omega\left(x_2-x_1\right)$$

для всех x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ из $[a,b]$. Функция $\omega(x)$ называется модулем непрерывности.

Класс $W^r H_\omega(a,b)$ состоит из функций $f(x)$, заданных на $[a,b]$, имеющих на этом отрезке производные $f^{(r)}(x)$ порядка r и удовлетворяющих неравенству

$$\left|f^{(r)}(x_2) - f^{(r)}(x_1)\right| \le \omega(x_2 - x_1).$$

Через $\tilde{W}^r H_\omega(a,b)$ обозначается класс периодических функций с периодом $(b-a)$, входящих в класс $W^r H_\omega(a,b)$.

Через $\tilde{W}^r(M;a,b)$ обозначается класс периодических функций с периодом $(b-a)$, входящих в класс $W^r(M;a,b)$.

Через $H^{\omega_1\omega_2}(D)$ обозначается класс определенных на $D = (a \le x \le b; c \le e \le d)$ функций $f(x)$, таких, что для любых двух точек (x', y') и (x'', y'') из D

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \le \omega_1(|x' - x''|) + \omega_2(|y' - y''|),$$

где $\omega_1(\delta)$ и $\omega_2(\delta)$ - заданные модули непрерывности.

Через $W_p^{r_1 r_2}(1)$ обозначен класс функций $\varphi(x,y)$, имеющих частные производные по переменным x и y до r_1 и r_2 порядка включительно, причем $\left\|\varphi^{(r_1,r_2)}\right\|_{L_p(D)} \le 1, \quad D = [a,b;c,d]$.

Если $\varphi \in W_p^{r_1 r_2}(1)$ и $\left\|\varphi^{(r_1,0)}(x,0)\right\|_{L_p(a,b)} \le 1, \quad \left\|\varphi^{(0,r_2)}(0,y)\right\|_{L_p(c,d)} \le 1$, то $\varphi \in W_p^{*(r_1,r_2)}(1)$.

Через $\overline{W^{r_1r_2}}(1)$ обозначен класс функций $\varphi(x,y)$, имеющих частные производные по переменным x и y до r_1 и r_2 порядка включительно, причем

$$\left\|\varphi^{(r_1,0)}(x,y)\right\|_C \le 1, \quad \left\|\varphi^{(0,r_2)}(x,y)\right\|_C \le 1, \quad \left\|\varphi^{(r_1,r_2)}(x,y)\right\|_C \le 1.$$

Через $W^r_{L_p(D)}(1)$ обозначен класс функций, имеющих частные производные до $r-го$ порядка включительно, ограниченные в метрике пространства $L_p(D)$ единицей, $D=[a,b;c,d]$.

1.4. Обзор приближенных методов вычисления интегралов Адамара

Интегралы Адамара возникли в результате решения задачи Коши для уравнений в частных производных гиперболического типа [1]. Задача Коши встречается в большом числе физических приложений. Ж. Адамар приводит такие примеры: цилиндрическая труба, безграничная в обоих направлениях, наполненная газом, который может испытывать небольшие возмущения; ток в однородном проводнике, безграничном в обоих направлениях, если задано начальное распределение силы тока и потенциала вдоль всего проводника; волновое уравнение, описывающее движение газа, если известны начальные возмущения и начальные скорости. Все эти физические задачи имеют решение в виде функции, связанной с потенциалом $u(r)$.Если задача усложнится, начальные условия задачи Коши будут более сложными и, в результате, решение $u(r)$ будет функцией, не имеющей производных. Следует ожидать, что решения задачи Коши в этом случае не существует, оно представляется в виде несобственного интеграла. Ж. Адамар ввел регуляризацию этого интеграла.

В последнее время, начиная с работ Адамара и Шварца, возник все возрастающий интерес к интегралам Адамара и интегральным уравнениям с интегралами в смысле Адамара.

Большой цикл работ по качественной теории уравнений с интегралами Адамара выполнил K. Wiener [43,44]. Он также решает интегральное уравнение с интегралом Адамара приближенным методом функциональных поправок. Серия его статей посвящена вопросам разрешимости интегральных уравнений с интегралом Адамара.

Многие задачи теории упругости приводят к необходимости вычисления интеграла Адамара и решения интегрального уравнения с интегралами Адамара. Например, в работе [21] N.I. Ioakimidis решает задачу распространения плоской трещины внутри трехмерной упругой среды. Эта задача сводится к граничному интегральному уравнению с интегралом Адамара

$$\int_S \frac{f(\xi_1,\xi_2)}{r^3}ds = -\frac{4\pi(1-\nu)}{E}p(x_1,x_2).$$

В результате интегрирования по частям получается эквивалентное уравнение

$$\Delta\int_S \frac{f(\xi_1,\xi_2)}{r}ds = -\frac{4\pi(1-\nu)}{E}p(x_1,x_2).$$

Подобная одномерная задача решена в работе N.I. Ioakimidis [22]. Для численного решения одномерного сингулярного интегрального уравнения предложен метод Галеркина и метод коллокаций.

Задачи аэродинамики также приводят к интегральным уравнениям с интегралами Адамара. Впервые это показал А.И. Некрасов в своей монографии [33], исследуя теорию крыла в нестационарном потоке. Позднее в трудах Х. Эшли и М. Лендала исследования в области аэродинамики крыльев и корпусов летательных аппаратов приводили к интегралам Адамара. Эти авторы вачисляли интегралы Адамара путем сведения этих интегралов к сингулярным интегралам.

Интерполяционно-квадратурная формула для вычисления интеграла в смысле Коши-Адамара

$$F(x) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{(x-z)^2}dx, \quad |z|<1, \quad f(-1)=f(1)=0,$$

встречающегося в теории несущей поверхности, получена С.И Гур-Мильнером.

Для численного решения широкого класса задач аэродинамики С.М.Белоцерковский [3] предложил метод дискретных вихрей. Строгое обоснование этого метода применительно к сингулярным интегральным уравнениям 1 рода проведено И.К. Лифановым и Я.Е. Полонским. Метод дискретных вихрей оказался весьма эффективным средством решения сингулярных интегральных уравнений и его развитию посвящен цикл статей И.К. Лифанова и его учеников [24-29]. Подробное изложение метода дискретных вихрей и его многочисленных приложений к задачам аэродинамики, электродинамики, теории упругости приведено в монографии И.К. Лифанова [27].

В статье A.C. Kaja и F. Erdogan рассматривается интегральное уравнение первого рода с интегралом Адамара вида

$$\int_a^b \frac{h(t,\tau)}{(\tau-t)^p} x(\tau)\,d\tau + \int_a^b h_1(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = f(t), \qquad (1.4.1)$$

которое решается методом моментов с соответствующим образом выбранной системой весовых ортогональных функций. В зависимости от величины p и веса это могут быть тригонометрические функции, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева, дельта-функции и т.д.

A.C. Kaja и F.Erdogan в вычислительных схемах решения уравнения (1.4.1) используют определение интегралов Адамара и некоторые специальные приемы. Они вычислили большое число интегралов при $p=2$ и при различных весах от степенных функций.

B. Bialecki рассматривает интеграл Адамара

$$\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^p}\,d\tau, \qquad (1.4.2)$$ где

$\gamma=(-1,1)$.

В этой работе функции Уиттекера, используются для построения квадратурных формул вычисления интегралов вида (1.4.2), в предположении,

что функция $\varphi(t)$ аналитическая в области D, внутри которой находится контур γ. Отдельно рассматривается случай $\gamma=(-1,1)$.

А.М. Линьков и С.Г. Могилевская исследуются методы вычисления интегралов Адамара

$$\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-t)^2}d\tau$$

в комплексной плоскости на непрерывных кривых γ, имеющих точки излома. Ими исследуются квадратурные формулы интерполяционного вида.

Глава 2

Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов Адамара

2.1. Интегралы с фиксированной сингулярностью

Асимптотически оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов Адамара с фиксированными особенностями были рассмотрены в статье [10]. В ней рассматриваются асимптотически оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов Адамара вида

$$I\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau)^{\mu}}, \quad \mu = 2,3\ldots \quad ;$$

$$F\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{|\tau|^{\mu+\lambda}}, \quad \mu = 2,3,\ldots, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Для вычисления интегралов $I\varphi$ и $F\varphi$ используются следующие квадратурные формулы:

$$I\varphi = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi); \tag{2.1.1}$$

$$F\varphi = \sum_{k=-N}^{N} \sum_{l=0}^{\rho} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(p_{kl}, t_k, \varphi), \tag{2.1.2}$$

где суммирование проводится при $k \neq 0$.

Интегралы $I\varphi$ и $F\varphi$ вычисляются на классах функций $W^r(1)$ и $W_p^r(1)$, $r \geq \nu, \quad 1 \leq p < \infty.$

В асимптотически оптимальных квадратурных формулах используется локальный сплайн, построенный в [6].

Пусть $f(t) \in W^r(1)$ и $t \in [0,1]$. На сегменте $[-1,1]$ функция $f(t)$ аппроксимируется полиномом

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \left[\frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + B_k \delta^{(k)}(1) \right],$$

где

$$\delta(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

Коэффициенты B_k определяются из равенства

$$(1-t)^r - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{B_k r!}{(r-k-1)!} (1-t)^{r-k-1} = (-1)^r R_{rq}(t),$$

где R_{rq} - полином степени r, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства L_q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$.

Построим локальный сплайн, аппроксимирующий функцию $f(t) \in W^r(1)$ на сегменте [-1,1]. Разобьем сегмент [-1,1] точками $t_k : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ на более мелкие сегменты $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}], k = 0,1,\ldots,N-1$. На каждом сегменте Δ_k функция $f(t)$ аппроксимируется полиномом

$$f(\Delta_k, t) = \sum_{l=0}^{r-1} \left[\frac{f^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l + B_{kl} \delta^{(l)}(t_{k+1}) \right],$$

где

$$\delta(t) = f(t) - \sum_{l=0}^{r-1} \frac{f^{(l)}(t_k)}{l!} (t - t_k)^l.$$

Коэффициенты B_{kl} определяются из равенства

$$\left(t_{k+1}-t\right)^{r}-\sum_{l=0}^{r-1}\frac{B_{kl}r!\left(t_{k+1}-t_{k}\right)}{\left(r-l-1\right)!}\left(t_{k+1}-t\right)^{r-l-1}=\left(-1\right)^{r}R_{rq}\left(\frac{t_{k}+t_{k+1}}{2},\frac{t_{k+1}-t_{k}}{2},t\right),$$

где через $R_{rq}\left(a,h,t\right)$ обозначен полином вида

$$t^{r}+\sum_{l=0}^{r-1}a_{l}t^{l},$$

определенный на сегменте Δ_{k} и наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства L_{q} $\left(1/p+1/q=1\right)$.

Локальный сплайн, составленный из полинома $f\left(\Delta_{k},t\right),k=0,1,\ldots,N-1$ обозначается через $f_{N}(t)$.

Теорема 2.1.1. Среди всевозможных квадратурных формул (2.1.1), использующих $2N\left(\rho+1\right),\rho=r-1$ значений подынтегральной функции для вычисления интеграла $I\varphi$, асимптотически оптимальной на классе $W^{r}(1)$ является формула

$$I\varphi=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!\left(k+1-\nu\right)}t^{k+1-\nu}\left((1-\left(-1\right)^{r+1-\nu}\right)+\sum_{k=-N}^{N-1}\int_{t_{k}}^{t_{k+1}}\frac{\varphi\left(\left[t_{k},t_{k+1}\right],\tau\right)}{\tau^{\nu}}d\tau+R_{N}.,\quad (2.1.3)$$

где $t_{k}=\pm\left(k/N\right)^{r+1/r+1-\nu},k=0,1,\ldots,N,$ суммирование проводится по индексам $k\neq-1,0;\varphi\left(\left[t_{k},t_{r+1}\right],\tau\right)$ - описанный выше полином.

Погрешность квадратурной формулы (2.1.3) равна

$$R_{N}\left[W^{r}\left(1\right)\right]=\frac{2+o(1)}{4^{r}r!}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}\frac{1}{N^{r}}.$$

Теорема 2.1.2. Пусть интеграл $I\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (2.1.1) при $p = r-1 \quad (r = 1,2,\ldots)$. Тогда при $1 \le p < \infty$

$$\xi_N\left[W_p^r(1)\right] \ge \frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^{r-1/q} r!(rq+1)^{1/q}} \left(\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}\right)^{r+1/q} \frac{1}{N^r}.$$

Теорема 2.1.3. Пусть интеграл $I\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (2.1.1) при $p = r-2 \; (r = 2,4,6)$. Тогда при $1 \le p < \infty$

$$\xi_N\left[W_p^r(1)\right] \ge \frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^{r-1/q} r!(rq+1)^{1/q}} \left(\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}\right)^{r+1/q} \frac{1}{N^r}.$$

Теорема 2.1.4. Среди всевозможных квадратурных формул вида (2.1.1), использующих $2N(\rho+1), \rho = r-1$ значений подынтегральной функции для вычисления интеграла $I\varphi$, асимптотически оптимальной на классе $W_\rho^r(1), r = 1,2,\ldots,1 \le \rho < \infty$ является формула (2.1.3)б в которой $t_k = \pm\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu}}$. Погрешность этой формулы равна

$$\left|R_N\right| = \frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^{r-1/q}(rq+1)^{1/q} r!} \left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu}\right)^{r+1/q} \frac{1}{N^r}.$$

Теорема 2.1.5. Среди квадратурных формул вида (2.1.2) асимптотически оптимальной на классе $W^r(1)$ является формула

$$F\varphi = \sum_{k=\nu+1}^{r-1} \frac{2\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-\nu-\lambda)} t_1^{k+1-\nu-\lambda} + \sum_{k=-N}^{N-1}{}'' \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi\left(\left[t_k, t_{k+1}\right], \tau\right)}{|\tau|^{\nu+\lambda}} d\tau + R_N, \qquad (2.1.4)$$

в которой $t_k=\left(\frac{k}{N}\right)^{r+1/r+1-\nu-\lambda}$. Погрешность этой формулы равна

$$R_N\left[W^r(1)\right]=(2+o(1))\left(\frac{r+1}{r+1-\nu-\lambda}\right)^{r+1}\frac{1}{4^r N^r r!}.$$

<u>Теорема 2.1.6.</u> Пусть интеграл $F\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле (2.1.2) при $p=r-1 \quad (r=1,2,\ldots)$. Тогда при $1\le p<\infty$

$$\xi_N\left[W_p^r(1)\right]\ge\frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^{r-1/q}r!(rq+1)^{1/q}N^r}\left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu-\lambda}\right)^{r+1}.$$

<u>Теорема 2.1.7</u>. Пусть интеграл $F\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле (2.1.2) при $\rho=r-1\,(r=2,4,\ldots)$. Тогда при $1\le p<\infty$

$$\xi_N\left[W_p^r(1)\right]\ge\frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^{r-1/q}r!(rq+1)^{1/q}N^r}\left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu-\lambda}\right)^{r+1/q}.$$

<u>Теорема 2.1.8.</u> Среди всевозможных квадратурных формул вида (2.1.2) при $\rho=r-1 \quad (r=1,2,\ldots)$, использующих $2N(\rho+1)$ значений подынтегральной функции для вычисления интеграла $F\varphi$, асимптотически оптимальной на классе $W^r(1)$ является формула (2.1.4), в которой $t_{\pm k}=\pm\left(k/N\right)^{r+1/q \big/ r+1/q-\nu-\lambda}$. Погрешность этой формулы равна

$$\left|R_N\left[W_\rho^r(1)\right]\right|=\frac{(1+o(1)R_{rq}(1)}{2^{r+1/q}(rq+1)^{1/q}r!N^r}\left(\frac{r+1/q}{r+1/q-\nu-\lambda}\right)^{r+1/q}.$$

<u>Доказательство</u> теоремы 2.1.1. Найдем верхнюю грань оценки снизу погрешности квадратурных формул вида (2.1.1) на классе $W^r(1)$. Введем следующие обозначения:

$$s_{\pm k} = \pm\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{r+1}{r+1-\nu}}, (k = 0,1,\ldots,N); M = [\ln N], l = \left[\frac{N}{M}\right];$$

N_k^* – число узлов квадратурной формулы (2.1.1) в сегменте

$$\Delta_k = \left[s_{kN}, s_{(r+1)N}\right], \left(\nabla_k = \left[s_{-(r+1)N}, s_{-kN}\right]\right), k = 0,1,\ldots,l,$$

где $s_{(l+1)N} \overset{def}{=} 1, s_{-(l+1)N} \overset{def}{=} -1.$

Кроме того, введем обозначения:

$$\varphi^+(t) = \frac{\varphi(t) + |\varphi(t)|}{2}, \quad \varphi^-(t) = \frac{\varphi(t) - |\varphi(t)|}{2}.$$

При вычислении оценки снизу можно ограничиться сегментом $[0,1]$. На этом сегменте построим функцию $\varphi^*(t)$, равную нулю при $t \in [0, s_M]$, принадлежащую классу $W^r(1)$ и обращающуюся в нуль вместе с производными до $(r-1)$-го порядка включительно в узлах t_k $(k = 1,2,\ldots,N)$ квадратурной формулы (2.1.1) и в точках s_{kM} $(k = 1,2,\ldots,l+1)$. Кроме того, потребуем, чтобы

$$\int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)d\tau \geq 0, k = 0,1,\ldots,l.$$

Очевидно, что

$$\int_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau^\nu} = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{1}{s_{(r+1)M}^\nu}\int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)d\tau + \left(\frac{1}{s_{kM}^\nu} - \frac{1}{s_{(k+1)M}^\nu}\right)\int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^*(\tau)d\tau\right] = I_1 + I_2. \qquad (2.1.5)$$

В монографии С.М. Никольского [34] показано, что при любом расположении узлов t_k

$$\inf_{p_{kl}} \sup_{\varphi\in W^r(1)} \left| \int_0^1 \varphi(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=0}^{r-1} p_{kl}\varphi^{(l)}(t_k) \right| \geq \frac{1}{r!\left[4(N-1)+2(r+1)^{1/r}\right]^r}.$$

Из этого неравенства, леммы С.А. Смоляка и теоремы С.М. Никольского [34], имеем

$$\sup_{\substack{\varphi\in W^r(1)\\ \varphi^{(j)}(v_i)=0\\ v_i\in\left[s_{kM},s_{(k+1)M}\right], i=1,2,\ldots,N_k,\\ j=0,1,\ldots,r-1}} \int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi(\tau)d\tau \geq \frac{\left(s_{(k+1)M}-s_{kM}\right)^{r+1}}{r!\left[4(N_k-1)+2(r+1)^{1/r}\right]^r}.$$

Оценим сумму I_1.

$$I_1 = \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{s_{(k+1)M}^{\nu}} \int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi(\tau)d\tau \geq \sum_{k=1}^{l} \frac{\left(s_{(k+1)M}-s_{kM}\right)^{r+1}}{r!\left[4(N_k-1)+2(r+1)^{1/r}\right]^r} \geq$$

$$\geq \left(\frac{M}{N}\right)^{r+1}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}\frac{(1+o(1))}{r!}\sum_{k=M}^{l}\frac{1}{\left[4(N_k-1)+2(r+1)^{1/r}\right]^r}.$$

Можно показать, что сумма

$$\sum_{k=M}^{l} \frac{1}{\left[4(N_k-1)+2(r+1)^{1/r}\right]^r}$$

при выполнении условия $N_M + N_{M+1} + \ldots + N_l = N$ достигает минимума при $N_M = N_{M+1} = \ldots = N_l = N/_{l-M+1}$. Подставляя это значение в предыдущее неравенство, имеем

$$I_1 \geq \frac{1+o(1)}{4^r r!}\left[\frac{r+1}{r+1-\nu}\right]^{r+1}\frac{1}{N^r}.$$

Перейдем к оценке I_2

$$I_2 = \sum_{k=1}^{l}\left[\frac{1}{s_{kM}^{\nu}} - \frac{1}{s_{(k+1)M}^{\nu}}\right]\int_{s_{kM}}^{s_{(k+1)M}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau \geq \frac{1+o(1)}{N^{r+1}}M^{r+2}\frac{1}{(r+1)!}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+2} = o(N^{-r}).$$

Таким образом, из оценок I_1 и I_2 следует, что

$$\sup_{\varphi\in W^r(1)}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau^\nu} \geq 2\int_{0}^{1}\frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau^\nu} \geq \frac{2+o(1)}{4^r r!}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}\frac{1}{N^r}.$$

Оценка снизу получена.

Погрешность квадратурной формулы (2.1.3) равна

$$|R_N| \leq \left|\int_{t_{-1}}^{t_1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau^\nu} - \sum_{k=0}^{r-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!(k+1-\nu)}t_l^{k+-\nu}(1-(-1)^{k+1-\nu})\right| + 2\sum_{k=1}^{n-1}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi\left(\left[t_k,t_{r+1}\right],\tau\right)}{\tau^\nu}\right| = I_3 + I_4.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности.

$$I_3 = \left| \int_{t_{-1}}^{t_1} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(0) - \varphi'(0)\tau - \ldots - \varphi^{(r-1)}(0)\, \tau^{r-1} \big/ (r-1)!}{\tau^{\nu}} d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{2}{(r-1)!} \int_0^{t_1} \frac{\int_0^{\tau} (\tau - t)^{r-1} \varphi^{(r)}(t) dt}{\tau^{\nu}} d\tau \le \frac{2}{r!(r-\nu+1)} \bullet \frac{1}{N^{r+1}};$$

$$I_4 = 2 \sum_{k=1}^{N-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi([t_k, t_{k+1}], \tau)}{\tau^{\nu}} d\tau \right| =$$

$$= 2 \left| \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-\nu} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) \varphi^{(r)}(t) dt d\tau \right| =$$

$$= 2 \left| \sum_{k-1}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^{(r)}(t) \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{\nu} \left[\frac{K_r(\tau - t}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right] d\tau \right] dt \right| ., \qquad (2.1.6)$$

где $K_r(t) = \begin{cases} t^{r-1}, \textit{если } t \ge 0; \\ 0, \textit{если } t < 0. \end{cases}$

Зафиксировав произвольное значение t, получаем три возможности:

1) $\dfrac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} \ge \sum_{j=0}^{r-1} \dfrac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t);$

2) $\dfrac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} \le \sum_{j=0}^{r-1} \dfrac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1}-t);$

3) при $t_k \le \tau \le t^*$ выполняется второе неравенство, а при $t_k \ge \tau \ge t^*$ - первое.

Нетрудно видеть, что в случаях 1) и 2)

$$I_3 = \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-\nu} \left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1}-t) \right) d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{1}{t_k^{\nu}} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1}-t) \right) d\tau \right|. \qquad (2.1.7)$$

В случае 3) нужно рассмотреть две возможности:

а) внутренний интеграл в формуле (2.1.6) не меньше нуля;

б) внутренний интеграл в формуле (2.1.6) меньше нуля.

В случае а) справедливо неравенство (2.1.7):

$$I_3 = \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \tau^{-\nu} \left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1}-t) \right) d\tau \right| =$$

$$= \int_{t_k}^{t^*} \tau^{-\nu} \left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-t)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1}-t) \right) d\tau +$$

$$+ \int_{t^*}^{t_{k+1}} \tau^{-\nu} \left(\frac{K_r(\tau-t)}{(r-t)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1}-t) \right) d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{t^{*\nu}} \int_{t_k}^{t^*} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-t)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{t^{*\nu}} \int_{t^*}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-t)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{t^{*\nu}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-t)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{t_k^{\nu}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{K_r(\tau - t)}{(r-t)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t) \right) d\tau.$$

В случае б:

$$I_3 \le \frac{1}{t_k^{\nu}} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^-(t,\tau)\, d\tau \right| - \frac{1}{t_{k+1}^{\nu}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^+(t,\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{t_k^{\nu}} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t,\tau)\, d\tau \right| + \left(\frac{1}{t_k^{\nu}} - \frac{1}{t_{k+1}^{\nu}} \right) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi^+(t,\tau)\, d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{t_k^{\nu}} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi(t,\tau)\, d\tau \right| + \frac{t_{k+1}^{\nu} - t_k^{\nu}}{t_k^{\nu} t_{k+1}^{\nu}} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{(\tau - t)^{r-1}}{(r-1)!}\, d\tau.,$$

где

$$\varphi^+(t) = \begin{cases} \varphi(t), \text{ если } t \ge 0, \\ 0, \text{ если } t < 0; \end{cases} \qquad \varphi^-(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t \ge 0, \\ \varphi(t), \text{ если } t < 0; \end{cases}$$

$$\varphi(t,\tau) = \frac{K_r(\tau - t)}{(r-1)!} - \sum_{j=0}^{r-1} \frac{B_{kj}}{(r-1-j)!} K_{r-j}(t_{k+1} - t).$$

Продолжая начатые выкладки, имеем

$$I_4 \le 2\left|\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{t_k^{\nu}}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{\left(t_{k+1}-t\right)^r}{r!}-\sum_{j=0}^{r-1}\frac{B_{kj}\left(t_{k+1}-t_k\right)}{\left(r-1-j\right)!}\left(t_{k+1}-t\right)^{r-j+1}\right)dt\right|+A\frac{\ln N}{N^{r+1}}\le$$

$$\le\frac{2}{r!}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{2\left(\frac{t_{k+1}-t_k}{2}\right)^{r+1}R_{rq}(1)}{\left(r+1\right)t_k^{\nu}}+A\frac{\ln N}{N^{r+1}}=$$

$$=\frac{4R_{rq}(1)}{\left(r+1\right)!2^{r+1}}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{\left(t_{k+1}-t_k\right)^{r+1}}{t_k^{\nu}}+A\frac{\ln N}{N^{r+1}}=\frac{R_{rq}(1)\left(1+o(1)\right)}{2^{r-1}\left(r+1\right)!N^r}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}.$$

Корнейчук Н.П. показал, что $R_{r1}(1)=r+1\big/2^r$. Подставляя это значение в Предыдущее неравенство, имеем

$$I_4\le\frac{2+o(1)}{4^r r!N^r}\left(\frac{r+1}{r+1-\nu}\right)^{r+1}.$$

Собирая полученные оценки погрешности квадратурной формулы и сравнивая их с величиной функционала $\xi_N\left[W^r(1)\right]$, завершаем доказательство теоремы 2.1.1.

Доказательство теоремы 2.1.2 подобно доказательству теоремы 2.1.1. Поэтому отметим лишь места, в которых доказательства имеют некоторые различия.

Введем следующие обозначения:

$$s_{\pm k}=\pm\left(\frac{kM}{N}\right)^{\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}},\ k=0,1,\ldots,l+1,\ s_{-l-1}\overset{def}{=}-1,\ s_{l+1}\overset{def}{=}1,\ M=\left[\ln N\right],\ l=\left[N\big/M\right].$$

Пусть $\varphi^*(t)$ - функция, обращающаяся в нуль вместе со всеми своими производными до $(r-1)$-го порядка включительно в узлах t_k квадратурной формулы (2.1.1), в точках $s_{\pm k}$ $(k=1,2,\ldots,l+1)$ и, кроме того, равная нулю на сегменте $[s_{-l},s_l]$. Из теорем 1' и D1 монографии [34] следует, что

$$\sup_{\substack{\varphi\in W_\rho^r(M_k;[s_k,s_{k+1}])\\ \varphi^{(l)}(t_j)=0\\ j=1,2,\ldots,N_k\\ l=0,1,\ldots,r-1}} \left| \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi(\tau)d\tau \right| \geq \frac{\left(s_{k+1}-s_k\right)^{r+1-1/q} M_k R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}\left(N_k-1+\left[R_{rq}(1)\right]^{1/r}\right)^r}.,$$

где N_k - число узлов квадратурной формулы (2.1.1), расположенных в сегменте $[s_k,s_{k+1}]$.

Как и при доказательстве теоремы 2.1.1, имеем

$$\int_0^1 \frac{\varphi^*(\tau)d\tau}{\tau^\nu} \geq \sum_{k=1}^{l}\left[\frac{1}{s_{r+1}^\nu}\int_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^*(\tau)d\tau+\left(\frac{1}{s_k^\nu}-\frac{1}{s_{k+1}^\nu}\right)\int_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^{*-}(\tau)d\tau\right]=I_1+I_2.$$

Нетрудно видеть, что

$$I_1=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{s_{k+1}^\nu}\int_{s_k}^{s_{k+1}}\varphi^*(\tau)d\tau \geq \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!\left(rq+1\right)^{1/q}}\sum_{k=1}^{l}\frac{M_k\left(s_{k+1}-s_k\right)^{r+1-1/q}}{s_{k+1}^\nu\left(N_k-1+\left[R_{rq}(1)\right]^{1/r}\right)^r}.$$

Величины M_k можно выбрать произвольно при выполнении только одного условия: $\sum\limits_{\substack{k=-1\\ k\neq 0}}^{l} M_k^p=1$. Положив все значения M_k равными $\left(1/2l\right)^{1/p}$, имеем

$$I_1 \ge \frac{R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}(2l)^{1/p}} \sum_{k=1}^{l} \frac{\left(s_{k+1}-s_k\right)^{r+1-1/p}}{s_{k+1}^{\nu}\left(N_k-1+\left[R_{rq}(1)\right]^{1/r}\right)^r} \ge$$

$$\ge \frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}(2l)^{1/p}} \left(\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}\right)^{r+1/q} \frac{M^{r+1/q}}{N^{r+1/q}} \sum_{k=1}^{l} \frac{1}{\left(N_k-1+\left[R_{rq}(1)\right]^{1/r}\right)^r} =$$

$$= \frac{(1+o(1))R_{rq}(1)}{2^r r!(rq+1)^{1/q}} \left(\frac{r+1/q}{r-\nu+1/q}\right)^{r+1/q} \frac{1}{N^r}.$$

Перейдем к оценке I_2:

$$\left|I_2\right| = \sum_{k=1}^{l} \left| \frac{s_{k+1}^{\nu}-s_k^{\nu}}{s_k^{\nu}s_{k+1}^{\nu}} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi^{*-}(\tau)d\tau \right| \le \sum_{k=1}^{l} \left| \frac{s_{k+1}^{\nu}-s_k^{\nu}}{s_k^{\nu}s_{k+1}^{\nu}} \right| \left| \int_{s_k}^{s_{k+1}} \frac{1}{(r-1)!} \int_{s_k}^{\tau} \left(\tau-t\right)^{r-1} \varphi^{*(r)}(t)dtd\tau \right| = o(N^{-r}).$$

Из оценок I_1 и I_2 следует справедливость теоремы 2.1.2.

Доказательства теорем 2.1.3 – 2.1.8 аналогичны доказательствам первых двух теорем и поэтому не приводятся.

2.2. Квадратурные формулы для интегралов Адамара с переменной сингулярностью на классах периодических функций

Многочисленные задачи аэродинамики и электродинамики приводят к интегральным уравнениям с интегралами в смысле Адамара. В работе М.К. Лифанова[24] показано, что решение одной из задач аэродинамики приводит к интегральному уравнению

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{\sin^2 \frac{\sigma - s}{2}} d\sigma = f(s). \tag{2.2.1}$$

В связи этим представляет интерес построение асимптотически оптимальных квадратурных формул для вычисления интеграла

$$T\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{\sin^p \frac{\sigma - s}{2}} d\sigma. \tag{2.2.2}$$

Отметим, что интеграл $\int_\gamma \frac{\varphi(\sigma)}{(\sigma - s)^p} d\sigma$, где γ - единичная окружность с центром в начале координат, сводится к интегралу типа (2.2.2). Сделав замену переменных $\tau = e^{i\sigma}, t = e^{is}$, имеем:

$$\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau = \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\sigma}\varphi(e^{i\sigma})d\sigma}{\left(\sin \frac{\sigma - s}{2}\right)^p e^{ips} e^{i\frac{\sigma - s}{2}p}} = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma)}{\sin^p \frac{\sigma - s}{2}} d\sigma. \tag{2.2.3}$$

Построим оптимальные квадратурные формулы для вычисления интеграла (2.2.2) при четных показателях сингулярности: $p = 2, 4, 6, \ldots$ на классе $W^r(1)$.

Интеграл $T\varphi$ будем вычислять по квадратурным формулам вида

$$T\varphi = \sum_{k=1}^{N} \varphi(s_k) p_k(s) + R_N\left(s, s_k, p_r(s), \varphi\right), \tag{2.2.4}$$

с произвольными узлами $0 \le s_k \le 2\pi$ и весами $p_k(s), (k = 1, 2, \ldots, N)$.

Теорема 2.2.1. Пусть $\mathrm{M} = W^r(1)$ и интеграл $T\varphi$ вычисляется по квадратурным формулам вида (2.2.4). Тогда

$$\xi_N[\mathrm{M}] \ge \frac{(4+o(1))K_r \pi^{1-p}}{N^{r+1-p}} \bullet \frac{1}{p-1} \bullet \frac{1}{2^{p-1}}$$

и оптимальной по порядку является квадратурная формула

$$T\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{s_N\left[\varphi(\sigma)\right] d\sigma}{\sin^p \frac{\sigma - s}{2}} + R_N, \tag{2.2.5}$$

где $s_N[\varphi] \in C^{r-1}$ - интерполяционный сплайн порядка r по равномерному разбиению $v_k = \dfrac{2\pi k}{N}$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$. Погрешность квадратурной формулы равна

$$R_N[\mathrm{M}] \le \frac{4(1+o(1))K_r \pi}{N^{r+1}} B(p).$$

Здесь K_r - постоянная Фавара

$$K_r = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r-1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \quad B(p) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \frac{1}{\sin^p \frac{(k+1)\pi}{N}}.$$

Доказательство. Вычислим оценку снизу погрешности квадратурной формулы вида (2.2.4) на классе $W^r(1)$ и на произвольном векторе (S, P) узлов и весов. Пусть вектор узлов S имеет вид $S = (s_1, \ldots s_N)$.

Обозначим через $\varphi^*(\sigma)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\varphi^*(\sigma)\in W^r(1)$;

2) $\min\varphi^*(\sigma)=\varphi^*(s_k)=0, \quad k=1,2,\dots,N$;

3) $\int\limits_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma)d\sigma=\frac{2\pi K_r}{N^r}.$

Как показано в работе [31,] такие функции существуют.

Разделим сегмент $[0;2\pi]$на N равных частей точками $v_k=\frac{2\pi k}{N}\,(k=0,1,\dots,N)$. Возьмем произвольное разбиение $v_j\ (j=1,2,\dots,N)$ и представим интеграл в виде суммы

$$T(v_j)=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varphi^*(\sigma)}{\sin^p\frac{\sigma-v_j}{2}}d\sigma\geq\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1}\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\frac{\varphi^*(\sigma)d\sigma}{\sin^p\frac{\sigma-v_j}{2}}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-2}\int\limits_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}}\frac{\varphi^*(\sigma)d\sigma}{\sin^p\frac{\sigma-v_j}{2}}\geq$$

$$\geq\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}\left[\int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\varphi^*(\sigma)d\sigma+\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi^*(\sigma)d\sigma\right].$$

Поскольку максимальное значение функции $T\varphi^*(s)$ не меньше его среднего значения, то

$$\max\left[T\varphi^*(s)\right]\geq\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left[T\varphi^*(v_j)\right].$$

Усредним суммы $T(v_j)$:

$$T\varphi(s)\geq\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}T(v_j)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1}\frac{1}{\sin^p\frac{(k+1)\pi}{N}}\left[\int\limits_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}}\varphi^*(\sigma)d\sigma+\int\limits_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\varphi^*(\sigma)d\sigma\right]=$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \frac{1}{\sin^p \frac{(k+1)\pi}{N}} \sum_{j=1}^{N} \left[\int_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}} \varphi^*(\sigma) d\sigma + \int_{v_{j-k+1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\sigma) d\sigma \right] = \frac{2}{N} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma) d\sigma \bullet \sum_{r=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \frac{1}{\sin^p \frac{(k+1)\pi}{N}}.$$

Оценим сумму

$$B(p) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \frac{1}{\sin^p \frac{(k+1)\pi}{N}}.$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \frac{1}{\sin^p \frac{(k+1)\pi}{N}} \geq \sum_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \left(\frac{N}{(k+1)\pi} \right)^p \geq \left(\frac{N}{\pi} \right)^p \frac{1}{p-1} \frac{1}{2^{p-1}}.$$

В итоге получаем

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N} \left(T\varphi^* \right) \left(v_j \right) \geq \frac{K_r \pi^{1-p}}{N^{r+1-p}} \bullet \frac{(1+o(1))}{(p-1)} \bullet \frac{1}{2^{p-3}}.$$

Оценим величину погрешности квадратурной формулы (2.2.5). Для этого оценим величину R_N, полагая, что $s \in \left[s_j, s_{j+1} \right)$:

$$R_N = \sup_{\varphi\in W^r(1)} \max_s \left| \int_0^{2\pi} \left[\varphi(\sigma) - s_N\left[\varphi(\sigma)\right]\right] \frac{1}{\sin^p \dfrac{\sigma - s}{2}} d\sigma \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \left| \int_{s_{k+j}}^{s_{k+j+1}} \left(\varphi(\sigma) - s_N\left[\varphi(\sigma)\right]\right) \frac{1}{\sin^p \dfrac{\sigma - s}{2}} d\sigma \right| + \sum_{k=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \left| \int_{s_{k+j}}^{s_{k+j+1}} \left(\varphi(\sigma) - s_N\left[\varphi(\sigma)\right]\right) \frac{1}{\sin^p \dfrac{\sigma - s}{2}} d\sigma \right| +$$

$$+ \left| \int_{s_{j-2}}^{s_{j+3}} \left(\varphi(\sigma) - s_N\left[\varphi(\sigma)\right]\right) \frac{1}{\sin^p \dfrac{\sigma - s}{2}} d\sigma \right| = r_1 + r_2 + r_3.$$

Оценим каждое слагаемое. Первые два слагаемых этой суммы оцениваются одинаково. Поэтому оценим только одну сумму

$$\sum_{k=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \left| \int_{s_{k+j}}^{s_{k+j+1}} \left(\varphi(\sigma) - s_N\left[\varphi(\sigma)\right]\right) \frac{1}{\sin^p \dfrac{\sigma - s}{2}} d\sigma \right| \leq \sum_{k=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \left(\frac{K_r}{N^r}\right) \frac{2\pi}{N} \frac{1}{\sin^p \dfrac{s_{j+k} - s_{j+1}}{2}} =$$

$$\frac{2\pi}{N} \frac{K_r}{N^r} \sum_{k=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \frac{1}{\sin^p \dfrac{s_{k-1}}{2}} = \frac{2\pi}{N} \frac{K_r}{N^r} \sum_{k=2}^{\left[\frac{N}{2}\right]-1} \frac{1}{\sin^p \dfrac{\pi(k-1)}{N}} \leq \frac{2\pi K_r}{N^{r+1}} B(p).$$

В предыдущих выкладках использовались оценки аппроксимации сплайнами. Осталось оценить слагаемое r_3. Пусть $h = \min\left(s - s_{j-2}, s_{j+3} - s\right)$. Не ограничивая общности, положим $h = s - s_{j-2}$. Тогда

$$r_3=\left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+3}}\left(\varphi(\sigma)-s_N[\varphi]\right)\frac{1}{\sin^p\dfrac{\sigma-s}{2}}d\sigma\right|=\left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+3}}\psi(\sigma)\frac{1}{\sin^p\dfrac{\sigma-s}{2}}d\sigma\right|\le$$

$$\le\left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+h}}\psi(\sigma)\frac{1}{\sin^p\dfrac{\sigma-s}{2}}d\sigma\right|+\left|\int\limits_{s_{j+h}}^{s_{j+3}}\psi(\sigma)\frac{1}{\sin^p\dfrac{\sigma-s}{2}}d\sigma\right|=r_{31}+r_{32},$$

где $\psi(\sigma)=\varphi(\sigma)-s_N(\sigma)$.

Оценим каждое выражение r_{31} и r_{32} в отдельности. Пользуясь определением сингулярного интеграла и интеграла в смысле Адамара, легко получаем что

$$r_{31}=\left|\int\limits_{s_{j-2}}^{s_{j+h}}\left(\psi(\sigma)-\psi(s)-\frac{1}{1!}\psi'(s)(\sigma-s)-\ldots-\frac{1}{(p-1)!}\psi^{(p-1)}(s)(\sigma-s)^{p-1}\right)\bullet\frac{1}{\sin^p\dfrac{\sigma-s}{2}}d\sigma\right|\le$$

$$\le A\int\limits_{s}^{s+h}\left|\sigma-s\right|^{r-p}d\sigma\le AN^{-r-1+p}.$$

Оценка r_{32} следует из цепочки неравенств:

$$r_{32}\le Ah^{-p+1}\max_{\sigma\in\left[s_{j+h},s_{j+3}\right]}\left|\psi(\sigma)\right|\le AN^{-r}h^{-p+1}\le AN^{-(r+1-p)}.$$

Собирая последние неравенства и сопоставляя их с оценкой снизу, имеем

$$R_N[\mathrm{M}]=\frac{4\left(1+o(1)\right)K_r\pi}{N^{r+1}}B(p).$$

2.3. Интегралы Адамара с переменной сингулярностью на бесконечном интервале.

В данном параграфе построены оптимальные по порядку по точности алгоритмы вычисления интегралов Адамара следующего вида:

$$K\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau - t|^{p+\lambda}}; \quad p = 1, 2, \ldots; \quad 0 < \lambda < 1 \tag{2.3.1}$$

и интегралов типа Коши-Адамара

$$G\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^{p}}, \quad p = 2, 3, \ldots. \tag{2.3.2}$$

Изложенные в этом параграфе результаты опубликованы в статье И.В. Бойкова и Н.Ф.Добрыниной [10]. Здесь также использованы некоторые результаты статьи И.В. Бойкова [5].

Будем вычислять интегралы (2.3.1) и (2.3.2) в предположении, что $\varphi(t) = \rho(t)\psi(t)$, где $\rho(t)$-весовая функция. В качестве весовых функций используются

$$\rho_1(t) = a^{-|t|}, \quad \rho_2(t) = e^{-t^2}, \quad \rho_3(t) = \left(1 + t^2\right)^{-\alpha}.$$

Будем считать, что $\varphi(t) \in W^r_{\rho_i}(1)$, если $\varphi(t) = \rho_i(t)\psi(t)$, где $\psi(t) \in W^r(1)$.

При этом сделаем предположение, что все производные функции $\varphi(t)$ до $(r-1)$-го порядка включительно ограничены одной и той же постоянной, по модулю меньшей или равной единице.

Вычисление интегралов (2.3.1) и (2.3.2) будем проводить по формулам:

$$K\varphi = \sum_{k-1}^{2N} \sum_{l=0}^{s} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi); \tag{2.3.3}$$

$$G\varphi = \sum_{k-1}^{2N} \sum_{l=0}^{s} p_{kl}(t)\varphi^{(l)}(t_k) + R_N(t, t_k, p_{kl}, \varphi). \tag{2.3.4}$$

Теорема 2.3.1. Пусть $\mathrm{M}=W_{\rho_i}^r(1),\quad i=1,2,3.$ Интеграл $K\varphi$ вычисляется квадратурной формуле вида (2.3.3) при $s=0$. Тогда

$$\xi_N[\mathrm{M}]\geq\frac{C}{N^{r+1-p-\lambda}},$$

где C - постоянная.

Теорема 2.3.2._ Пусть $\mathrm{M}=W_{\rho_i}^r(1),\quad i=1,2,3.$ Интеграл $G\varphi$ вычисляется по квадратурной формуле вида (2.3.4) при $s=0$. Тогда

$$\xi_N[\mathrm{M}]\geq\frac{C}{N^{r+1-p}},$$

где C - постоянная.

Построим квадратурную формулу для вычисления интеграла $K\varphi$ на классе $W_{\rho_i}^r(1),\quad i=1,2,3.$ Введем обозначения:

$$A_1=\left[(r-p+1)\ln N\right];\quad A_2=\left[(r\ln N)^{1/2}\right];\quad A_3=\left[\left(\frac{N^2}{\ln N}\right)^{1/2\alpha-1}\right];$$

$$t_k^1=k;\, k=-A_1,\ldots,-1,0,1,\ldots,A_1-1;$$
$$t_k^2=k;\, k=-A_2,\ldots,-1,0,1,\ldots,A_2-1;$$
$$t_k^3=k;\, k=-A_3,\ldots,-1,0,1,\ldots,A_3-1;$$

$$n_k^1=\left[\frac{N}{a^{|k|/r}}\right];\quad n_k^2=\left[\frac{N}{\exp\left(k^2/r\right)}\right];\quad n_k^3=\left[\frac{N}{|k|^{\frac{2\alpha-1}{2}}}\right];\quad при\; k=0, n_0^3=N.$$

Пусть $t\in\left(t_j,t_{j+1}\right),\quad t\in(-\infty,-A_i-1]\cup[-A_i+1,A_i-1]\cup[A_i+1,\infty)$. Тогда интеграл $K\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$K\varphi=\sum_{k=-A_i}^{A_i-1}\int_{t_k^{(i)}}^{t_{k+1}^{(i)}}\frac{\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau+R_N, \qquad (2.3.5)$$

где $\varphi_N(\tau)=\begin{cases}P_{n_k}[\varphi(\tau)] & при\,\tau\in[t_k,t_{k+1}],\,k\neq j-1,j,j+1;\\ P_{n_{j-1}+n_j+n_{j+1}}[\varphi(\tau)] & при\ \tau\in[t_{j-1},t_{j+2}].\end{cases}$

$P_n[\varphi]$- оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов степени n по узлам многочленов Чебышева первого рода степени $n+1.$ Построение таких операторов описано в [23].

Пусть $t\in[-A_i-1,-A_i+1]\cup[A_i-1,A_i+1].$ Тогда интеграл $K\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$K(\rho_i\psi)=\sum_{k=-A_i+1}^{A_i-2}\int_{t_k^{(i)}}^{t_{k+1}^{(i)}}\frac{\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau+R_N, \qquad (2.3.6)$$

где $\varphi_N(\tau)=P_{n_k}(\varphi(\tau))$ при $\tau\in[t_r,t_{k+1}].$

Теорема 2.3.3. Погрешность квадратурных формул (2.3.5)-(2.3.6), предназначенных для вычисления интеграла Адамара (2.3.1) при $\varphi(0)=0,\ s=0,$ на классе $W_{\rho_i}^r(1),\ i=1,2,3,$ равна $|R_N|=AN^{-r+p+\lambda}\ln N.$

При $t\in\left[t_j^{(i)},t_{j+1}^{(i)}\right],\quad t\in(-\infty,-A_i-1]\cup[-A_i+1,A_i-1]\cup[A_i+1,\infty),$ интеграл $G\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$G(\rho_i\psi)=\sum_{k=-A_i}^{A_i-1}\int_{t_k^{(i)}}^{t_{k+1}^{(i)}}\frac{\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^{p}}d\tau+R_N, \qquad (2.3.7)$$

где $\varphi_N(\tau)=\begin{cases}P_{n_k}[\varphi(\tau)] & при\,\tau\in[t_k,t_{k+1}],\,k\neq j-1,j,j+1;\\ P_{n_{j-1}+n_j+n_{j+1}}[\varphi(\tau)] & при\ \tau\in[t_{j-1},t_{j+2}].\end{cases}$

При $t \in [-A_i - 1, -A_i + 1] \cup [A_i - 1, A_i + 1]$ интеграл $G\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$G(\rho_i \psi) = \sum_{k=-A_i+1}^{A_i-2} \int_{t_k^{(i)}}^{t_{k+1}^{(i)}} \frac{\varphi_N(\tau)}{(\tau - t)^p} d\tau + R_N, \qquad (2.3.8)$$

где $\varphi_N(\tau) = P_{n_k}(\varphi(\tau))$ при $\tau \in [t_r, t_{k+1}]$.

Теорема 2.3.4. Погрешность квадратурных формул (2.3.7)-(2.3.8), предназначенных для вычисления интеграла Коши-Адамара (2.3.2) при $\varphi(0) = 0$, на классе $W_{\rho_i}^r(1), i = 1, 2, 3,$ равна $|R_N| = O(N^{-r+p} \ln N)$.

Обозначим через $T_r(t, \Delta_k)$ полином Чебышева первого рода степени r, наименее уклоняющийся от нуля в равномерной метрике на сегменте Δ_r, а через $x_1^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}$ его корни. Через $P_r(t, \Delta_k)$ обозначим полином, интерполирующий функцию $\varphi(t)$ на сегменте Δ_k по узлам $x_1^{(k)}, \dots, x_r^{(k)}$. Воспользуемся обозначениями $A_i, t_k^i, n_k^i,$ введенными при построении квадратурных формул (2.3.5)-(2.3.8). Разделим каждый из сегментов $[t_k^i, t_{k+1}^i]$ на $m_k^i = \left[\frac{n_k^i}{r}\right] + 1$ равных частей и введем обозначения:

$$t_{k,l}^i = \frac{k + l}{m_k^i}.$$

Интеграл (2.3.1) будем вычислять по квадратурным формулам:

$$K(\rho_i \psi) = \sum_{k=-A_i}^{j-1} \sum_{l=0}^{m_{k-1}} \int_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i} \frac{\rho_i(\tau) P_r\left(\psi, \left[t_{k,l}^i, t_{k,l+1}^i\right]\right)}{|\tau - t|^{p+\lambda}} d\tau + \sum_{l=0}^{s-2} \int_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i} \frac{\rho_i(\tau) P_r\left(\psi, \left[t_{j,l}^i, t_{j,l+1}^i\right]\right)}{|\tau - t|^{p+\lambda}} d\tau +$$

$$+\int\limits_{t^i_{j,s-1}}^{t^i_{j,s+2}} \frac{\rho_i(\tau)P_r\left(\psi,\left[t^i_{j,s-1},t^i_{j,s+2}\right]\right)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau+\sum_{l=s+2}^{m^i_j-1}\int\limits_{t^i_{j,l}}^{t^i_{j,l+1}} \frac{\rho_i(\tau)P_r\left(\psi,\left[t^i_{j,l},t^i_{j,l+1}\right]\right)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau+$$

$$+\sum_{k=j+1}^{A_i-1}\sum_{l=0}^{m^i_n-1}\int\limits_{t^i_{k,l}}^{t^i_{k,l+1}} \frac{\rho_i(\tau)P_r\left(\psi,\left[t^i_{k,l},t^i_{k,l+1}\right]\right)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau+R_N \qquad (2.3.9)$$

при $t\in\left[t^i_{j,s},t^i_{j,s+1}\right)$ и $t\in(-\infty,-A_i-1]\cup[-A_i+1,A_i-1]\cup[A_i+1,\infty)$;

$$K(\rho_i\psi)=\sum_{k=A_i+1}^{A_i-2}\sum_{l=0}^{m^i_k-1}\int\limits_{t_{k,l}}^{t^i_{k,l+1}} \frac{P_r\left(\varphi,\left[t^i_{k,l},t^i_{k,l+1}\right]\right)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau+R_N, \qquad (2.3.10)$$

при $t\in[-A_i-1,-A_i+1]\cup[A_i-1,A_i+1]$.

При построении квадратурных формул (2.3.9), (2.3.10) предполагается, что если $s=0,$ то $t^i_{j,s-1}=t^i_{j-1,m^i_{j-1}}$.

Теорема 2.3.5. Погрешность квадратурных формул (2.3.9)-(2.3.10), предназначенных для вычисления интеграла Адамара (2.3.1) при $\rho_i(0)=0$ на классе $W^r_{\rho_i}(1), i=1,2,3,$ равна $R_N=O\left(N^{-r+p-1+\lambda}\right)$.

Интеграл $G\varphi$ будем вычислять по квадратурной формуле

$$G\varphi=\sum_{k=-A_i}^{j-1}\sum_{l=0}^{m^i_k-1}\int\limits_{t^i_{k,l}}^{t^i_{k,l+1}} \frac{P_r\left(\varphi,\left[t^i_{k,l},t^i_{k,l+1}\right]\right)}{(\tau-t)^p}d\tau+\sum_{l=0}^{s-2}\int\limits_{t^i_{j,l}}^{t^i_{j,l+1}} \frac{P_r\left(\varphi,\left[t^i_{j,l},t^i_{j,l+1}\right]\right)}{(\tau-t)^p}d\tau+$$

$$\int\limits_{t_{j,s-1}}^{t^i_{j,s+2}} \frac{P_r\left(\varphi,\left[t^i_{j,s-1},t^i_{j,s+2}\right]\right)}{(\tau-t)^p}d\tau+\sum_{l=s+2}^{m^i_j-1}\int\limits_{t^i_{j,l}}^{t^i_{j,l+1}} \frac{P_r\left(\varphi,\left[t^i_{j,s-1},t^i_{j,l+1}\right]\right)}{(\tau-t)^p}d\tau+$$

$$+\sum_{k=j+1}^{A_i-1}\sum_{l=0}^{m^l_k-1}\int\limits_{t^i_{k,l}}^{t^i_{k,l+1}} \frac{P_r\left(\varphi,\left[t^i_{k,l},t^i_{k,l+1}\right]\right)}{(\tau-t)^p}d\tau+R^i_N \qquad (2.3.11)$$

при $t\in\left[t_{j,s}^i,t_{j,s+1}^i\right)$ и $t\in(-\infty,-A_i-1]\cup[-A_i+1,A_i-1]\cup[A_i+1,\infty)$;

$$G\varphi=\sum_{k=-A_i+1}^{A_i-1}\sum_{l=0}^{m_k^i-1}\int_{t_{k,l}^i}^{t_{k+1,l}^i}\frac{P_r\left(\varphi,\left[t_k^i,t_{k+1}^i\right]\right)}{(\tau-t)^p}d\tau \qquad (2.3.12)$$

при $t\in[-A_i-1,-A_i+1]\cup[A_i-1,A_i+1]$.

Теорема 2.3.6. Погрешность квадратурных формул (2.3.11)-(2.3.12)Б предназначенных для вычисления интеграла Коши-Адамара (2.3.2) при $\varphi(0)=0$ на классе $W_{\rho_i}^r(1), i=1,2,3,$ равна $|R_N|=O\left(N^{-r-1+p}\right)$.

Доказательство теоремы 2.3.1 проводится по аналогии с более сложным доказательством теоремы 2.3.2 и поэтому опускается.

<u>Доказательство</u> теоремы 2.3.2. Для определенности ограничимся доказательством теоремы при весе $\rho_1(t)$. Введем множество точек Q, состоящее из узлов $\{t_k\}$ квадратурной формулы (2.3.4) и точек $v_k=-1+k/N,\ k=0,1,\dots,2N.$ Точки множества Q обозначим через w_k. Введем функцию $\varphi_j^*(t)=a^{-|t|}\psi_j^*(t),$ где

$$\psi_j^*(t)=\begin{cases}A(t-w_k)^r(w_{k+1}-t)^r\left(\dfrac{w_{k+1}-w_k}{2}\right)^{-r}\operatorname{sgn}(t-v_j)^p\ \textit{при}\ t\in[w_k,w_{k+1}],[w_k,w_{k+1}]\cap(v_{j-1},v_{j+1})=\varnothing,\\ 0\quad \textit{при}\ t\in\left[v_{j-1},v_{j+1}\right]\end{cases}$$

Константа A выбирается из условия $\psi_j\in W^r(1)$.

Рассмотрим интеграл

$$G\varphi_j^*(v_j)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_j^*(\tau)d\tau}{(\tau-v_j)^p}\ge\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_j^*(\tau)d\tau}{(\tau-v_j)^p}\ge\sum_{k=1}^{2N-j-1}\int_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}}\frac{\varphi_j^*(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}+\sum_{k=0}^{j-2}\int_{v_k}^{v_{k+1}}\frac{\varphi_j^*(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}\ge$$

$$\geq \sum_{k=1}^{2n-j-1}\left(\frac{N}{k}\right)^p \int_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \varphi_j^*(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{N}{k}\right)^p \int_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi_j^*(\tau)d\tau.$$

Усредним полученное неравенство по всем значениям j $(j = 0,1,\ldots,2N)$. В результате имеем

$$\sup_{\varphi}\max_{t}\left(G\varphi\right)(t) \geq \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}\left(G\varphi_j^*(v_j)\right) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1}\left[\sum_{k=1}^{2N-j-1}\left(\frac{N}{k}\right)^p \int_{v_{k+j}}^{v_{k+j+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \sum_{k=1}^{j-1}\left(\frac{N}{k}\right)^p \int_{v_{j-k-1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau)d\tau\right] =$$

$$= \frac{N^{p-1}}{2}\left[\sum_{j=0}^{2N-1}\sum_{k=1}^{2N}\frac{K_1\left(2N-j-k-1\right)}{k^p}\int_{v_{j+k}}^{v_{j+k+1}} \varphi^*(\tau)d\tau + \sum_{j=0}^{2N-1}\sum_{k=1}^{2N}\frac{K_1(j-k-1}{k^p}\int_{v_{j-k+1}}^{v_{j-k}} \varphi^*(\tau)d\tau\right] =$$

$$= \frac{N^{p-1}}{2}\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{k^p}\left[\int_{v_k}^{v_{2N}} \varphi^*(\tau)d\tau + \int_{v_0}^{v_{2N-k}} \varphi^*(\tau)d\tau\right] \geq \frac{N^{p-1}}{2^{p+1}}\int_{-1}^{1}\varphi^*(\tau)d\tau\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{k^p} \geq \frac{C}{2^{p+1}N^{r-p+1}},$$

где $K_1(x) = \begin{cases} 1, \text{ } если \text{ } x \geq 0; \\ 0, \text{ } если \text{ } x < 0. \end{cases}$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3.3. Погрешность квадратурной формулы (2.3.5) оценивается неравенством

$$\left|R_N^i\right| = \sum_{k=-A_i}^{j-1}\left|\int_{t_k^i}^{t_{k+1}^i}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau\right| + \left|\int_{t_{j-1}^i}^{t_{j+2}^i}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau\right| + \sum_{k=j+2}^{2N-1}\left|\int_{t_k^i}^{t_{k+1}^i}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_{-\infty}^{-A_i}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}}\right| + \left|\int_{A_i}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{|\tau-t|^{p+\lambda}}\right| = r_1^i + r_2^i + r_3^i + r_4^i + r_5^i.$$

Для определенности будем считать, что $j > 0$. Подробно рассмотрим случай, когда весовой функцией является $\rho_1(t) = \exp(-|t|)$. Нетрудно видеть, что

$$r_1^i = \sum_{k=-A_1}^{j-1}\left|\int_{t_k^1}^{t_{k+1}^1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau\right| \le$$

$$\le \sum_{k=-A_1}^{-1}\left|\int_{t_k^1}^{t_{k+1}^1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau\right| + \sum_{k=0}^{j-1}\left|\int_{t_k^1}^{t_{k+1}^1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}}d\tau\right| \le$$

$$\le \sum_{k=-A_1}^{-1}\left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda}\int_{t_k^1}^{t_{k+1}^1}|\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)|d\tau + \sum_{k=0}^{j-1}\left(\frac{1}{|k-j|}\right)^{p+\lambda}\int_{t_k^1}^{t_{k+1}^1}|\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)|d\tau \le$$

$$\le \sum_{k=-A_1}^{-1} C\left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda}\frac{\ln n_k^1}{\left(n_k^1\right)^r}\max_{t_k^1\le t\le t_{k+1}^1}\left|\varphi^{(r)}(t)\right| + \sum_{k=-A_1}^{-1} C\left(\frac{1}{-k+j}\right)^{p+\lambda}\frac{\ln n_k^1}{\left(n_k^1\right)^r}\max_{t_k^1\le t\le t_{k+1}^1}\left|\varphi^{(r)}(t)\right| \le$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} C\left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{\left(n_k^1\right)^r} \exp\left(-\left|t_{k+1}^{(1)}\right|\right) + \sum_{k=0}^{j-1} C\left(\frac{1}{-k+j}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{\left(n_k^1\right)^r} \exp\left(-t_{k+1}^{(1)}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} C\left(\frac{1}{|k|+j}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{\left(n_k^1\right)^r} \exp(-k) + \sum_{k=0}^{j-1} C\left(\frac{1}{-k+j}\right)^{p+\lambda} \frac{\ln n_k^1}{\left(n_k^1\right)^r} \exp(-k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=-A_1}^{-1} \frac{C}{|j-k|^{p+\lambda}} \frac{\ln\left(\frac{N}{e^{|k|/r}}\right)}{\left(\frac{N}{e^{|k|/r}}\right)^r} \exp(-|k|) + \sum_{k=0}^{j-1} \frac{C}{\left|j-|k|\right|^{p+\lambda}} \frac{\ln\left(\frac{N}{e^{k/r}}\right)}{\left(\frac{N}{e^{k/r}}\right)^r} \exp(-k) \leq CN^{-r} \ln N;$$

$$r_2^i = \left| \int_{t_{j-1}^1}^{t_{j+2}^1} \frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{|\tau-t|^{p+\lambda}} d\tau \right| \leq C \max\left| \left(\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)\right)^p \right|.$$

В.М. Тихомиров в работе [41] показал, что если $\left|\varphi(t)-\varphi_N(t)\right| \le CN^{-r}\ln N,$ то $\left|\left(\varphi(t)-\varphi_N(t)\right)^{(p)}\right| \le CN^{-r+p}\ln N.$ Следовательно, $r_2^1 \le CN^{-r+p}\ln N.$

Сумма r_3^i оценивается аналогично сумме r_1^i : $r_3^i \le CN^{-r}\ln N.$

Оценим интеграл $r_5^i,$ полагая, что $\varphi(0)=0.$ Тогда

$$r_5^1 = \int_{A_1}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left|\tau-t\right|^{p+\lambda}} = \int_{A_1}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(0)}{\left|\tau-t\right|^{p+\lambda}}d\tau = \int_{A_1}^{\infty} \frac{e^{-\tau}(\varphi(\tau)-\varphi(0))}{\left|\tau-t\right|^{p+\lambda}}d\tau.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $-A_1+1 \le t \le A_1-1$ и когда $t\in(-\infty,-A_1-1]\bigcup[A_1+1,\infty).$ В первом случае

$$r_5^1 \le \int_{A_1}^{\infty} \frac{e^{-\tau}\tau d\tau}{\left|\tau-t\right|^{p+\lambda}} \le CA_1\int_{A_1}^{\infty} e^{-\tau}d\tau = CA_1e^{-A_1} = CN^{-r+p-1}\ln N.$$

Во втором случае, воспользовавшись определением интеграла Адамара, имеем

$$r_5^1 \le \int_{A_1}^{\infty} \frac{e^{-\tau}(\psi(\tau)-\psi(0))}{\left|\tau-t\right|^{p+\lambda}}d\tau \le C\int_{A_1}^{\infty} \frac{(e^{-\tau}(\psi(\tau)-\psi(0)))^{(p)}}{\left|\tau-t\right|^{\lambda}}d\tau + CN^{-r+p-1} = CN^{-r+p-1}.$$

Следовательно, $r_5^1 = CN^{-r+p-1}.$

Интеграл r_4^1 оценивается аналогично. Собирая полученные оценки, при $\lambda \ne 0$ имеем $\left|R_N\right| \le CN^{-r+p}\ln N.$ Погрешность квадратурной формулы (2.3.6) оценивается аналогично. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3.4. Погрешность квадратурной формулы (2.3.7) оценивается неравенством

$$\left|R_N^i\right| \le \sum_{k=-A_i}^{j-1}\left|\int_{t_k^i}^{t_{k+1}^i}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau\right| + \left|\int_{t_{j-1}^i}^{t_{j+2}^i}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau\right| + \sum_{k=j+2}^{2N-1}\left|\int_{t_k^i}^{t_{k+1}^i}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_{-\infty}^{-A_i}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}\right| + \left|\int_{A_i}^{\infty}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}\right| = r_1^i + r_2^i + r_3^i + r_4^i + r_5^i.$$

Выражения $r_1^i, r_3^i, r_4^i, r_5^i$ оцениваются точно по такой же схеме, что и аналогичные выражения, рассмотренные при доказательстве предыдущей теоремы. Исключение составляет оценка интеграла r_2^i.

$$r_2^i = \left|\int_{t_{j-1}^i}^{t_{j+2}^i}\frac{\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau)}{(\tau-t)^p}d\tau\right| = \left|\int_{t_{j-1}^i}^{t_{j+2}^i}\frac{(\varphi(\tau)-\varphi_N(\tau))^{(p-1)}}{(\tau-t)}d\tau\right| + AN^{-r+p-1} \le AN^{-r+p-1}\ln N.$$

Из полученных оценок следует неравенство $\left|R_N^i\right| \le AN^{-r+p-1}\ln N.$

Аналогичным образом оценивается погрешность квадратурной формулы (2.3.8). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2.3.5. В статье В.М.Тихомирова [41] приведена классическая оценка погрешности интерполяционной формулы,

утверждающая, что на сегменте [-1,1] погрешность интерполяционной формулы

$$\left|f(\tau)-P_r(\tau,[-1,1])\right| \le \max \frac{\left|f^{(r)}(\tau)\right|}{r!2^{r-1}}.$$

Пользуясь этой оценкой и повторяя выкладки, приведенные при доказательстве теоремы 2.3.3, убеждаемся в справедливости оценки

$$\left|R_N\right| = CN^{-r+p-1+\lambda}.$$

<u>Доказательство</u> теоремы 2.3.6. Погрешность квадратурной формулы (2.3.11) оценивается неравенством

$$\left|R_N^i\right| \le \sum_{k=-A_i}^{j-1} \sum_{l=0}^{m_k^i-1} \left| \int_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i} \frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,\left[t_{k,l}^i,t_{k,l+1}^i\right])}{\left(\tau-t\right)^p} d\tau \right| + \sum_{l=0}^{s-2} \left| \int_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i} \frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,\left[t_{j,k}^i,t_{j,l+1}^i\right])}{\left(\tau-t\right)^p} d\tau \right| +$$

$$+\left| \int_{t_{j,s-1}^i}^{t_{j,s+2}^i} \frac{\varphi(\tau)-P_r\left(\tau,\left[t_{j,s-1}^i,t_{j,s+2}^i\right]\right)}{\left(\tau-t\right)^p} d\tau \right| + \sum_{l=s+2}^{m_j^i-1} \left| \int_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i} \frac{\varphi(\tau)-P_r\left(\tau,\left[t_{j,l}^i,t_{j,l+1}^i\right]\right)}{\left(\tau-t\right)^p} d\tau \right| +$$

$$+\sum_{k=j+1}^{A_i-1} \sum_{l=0}^{m_k^i-1} \left| \int_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i} \frac{\varphi(\tau)-P_r(\tau,\left[t_{k,l}^i,t_{k,l+1}^i\right])}{\left(\tau-t\right)^p} d\tau \right| \le r_1^i + r_2^i + r_3^i + r_4^i + r_5^i.$$

Суммы r_1^i и r_5^i оцениваются одинаково. Для определенности будем считать $j > 0$. Нетрудно видеть, что

$$r_1^i = \sum_{k=-A_i}^{-1} \frac{1}{\left(j-k\right)^p} \sum_{l=0}^{m_k^i-1} \int_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i} \left|\varphi(\tau) - P_r\left(\tau, \left[t_{k,l}^i, t_{k,l+1}^i\right]\right)\right| d\tau +$$

$$+\sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{\left(j-k\right)^p} \sum_{l=0}^{m_k^i-1} \int_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i} \left|\varphi(\tau) - P_r\left(\tau, \left[t_{k,l}^i, t_{k,l+1}^i\right]\right)\right| d\tau \le CN^r.$$

Суммы r_2^i и r_4^i также оцениваются одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением первой из них:

$$r_2^i = \sum_{l=0}^{s-2} \left| \int_{t_{j,l}^i}^{t_{j,l+1}^i} \frac{\varphi(\tau) - P_r(\tau, \left[t_{j,k}^i, t_{j,l+1}^i\right])}{\left(\tau - t\right)^p} d\tau \right| \le \sum_{l=0}^{S-2} \left(\frac{m_j^i}{s-1}\right)^p \int_{t_{k,l}^i}^{t_{k,l+1}^i} \left|\varphi(\tau) - P_r\left(\tau, \left[t_{k,l}^i, t_{k,l+1}^i\right]\right)\right| d\tau \le$$

$$\le \sum_{l=0}^{s-2} \left(\frac{m_j^i}{s-1}\right)^p \left(\frac{1}{2m_j^i}\right)^{r+1} \frac{R_r(1)}{2^r (r+1)!} \le CN^{-r-1+p}.$$

Осталось оценить интеграл r_3^i

$$r_3^i = \left| \int_{t_{j,s-1}^i}^{t_{j,s-2}^i} \frac{\varphi(\tau) - P_r\left(\tau, \left[t_{k,s-1}^i, t_{k,s+2}^i\right]\right)}{\left(\tau - t\right)^p} d\tau \right| \le CN^{-r+p-1} \ln N = O(N^{-r+p-1}).$$

Из оценок величин $r_1^i,\dots,r_5^i$ следует, что $|R_N| \le AN^{-r-1+p}$.

Аналогичная оценка справедлива и для квадратурной формулы (2.3.12). Теорема доказана.

2.4. Эффективный метод приближенного вычисления интеграла Адамара на замкнутом контуре

Рассмотрим интеграл Адамара в комплексной плоскости

$$A\varphi = \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - t)^p} \tag{2.4.1}$$

по замкнутому контуру *L*. Функция $\varphi(\tau)$ определена на всем контуре и имеет производные до r-го порядка включительно, причем $\max_L \left|\varphi^{(r)}(\tau)\right| \le 1,$ то есть $\varphi(\tau) \in W^r(1).$ Предположим, что функция $\varphi(\tau)$ задана с погрешностью. Это означает: вместо функции $\varphi(\tau)$ задана функция $\tilde{\varphi}(\tau)$ такая, что $|\varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau)| \le \varepsilon.$

Проведем разбиение контура L на N равных частей точками t_k и построим квадратурную формулу следующего вида:

$$A\varphi = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} \varphi(t_k') \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{1}{(\tau - t + \vec{n}h)^p} + \frac{1}{(\tau - t - \vec{n}h)^p} \right] d\tau + R_N, \tag{2.4.2}$$

где t_k'-точка контура L, равноотстоящая от t_k и t_{k+1}; $h = N^{-1/p}; \vec{n}$ - нормальный вектор к контуру L в точке t_k', направленный вне контура L.

Теорема 2.4.1. Пусть функция $\varphi(\tau) \in W^r(1)$ $(r \ge p)$ задана на кривой L значениями $\tilde{\varphi}(t_k')$, причем $|\varphi(t_k') - \tilde{\varphi}(t_k')| \le \varepsilon.$ Погрешность квадратурной формулы (2.4.2) при $h = N^{-1/p}$ оценивается неравенством

$$\left|R_N\right| \le A\left(N^{-1/p}\ln N + \varepsilon N^{1-1/p}\right).$$

Доказательство. Из результатов Л.А.Чикина [42] следует, что

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = \theta^+(t) + \theta^-(t),$$

где

$$\theta^+(t) = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left[\tau-(t+\vec{n}\eta)\right]^p}, \qquad \theta^-(t) = \lim_{\eta\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left[\tau-(t-\vec{n}\eta)\right]^p}.$$

По определению интеграла Адамара

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = (p-1)!\int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau.$$

В силу теоремы Коши

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left[\tau-(t-\vec{n}h)\right]^p} + \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left[\tau-(t+\vec{n}h)\right]^p} = (p-1)!\left[\int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-(t-\vec{n}h)} + \int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-(t+\vec{n}h)}\right].$$

Тогда

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} = \lim_{\eta\to 0}\frac{(p-1)!}{2}\left[\int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-(t-\vec{n}\eta)} + \int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-(t+\vec{n}\eta)}\right].$$

Из этого соотношения следует оценка погрешности квадратурной формулы (2.4.2):

$$\left|R_N\right| = \left|\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N}\tilde{\varphi}(t_k')\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\frac{1}{\left[\tau-(t-\vec{n}h)\right]^p} + \frac{1}{\left[\tau-(t+\vec{n}h)\right]^p}\right]d\tau\right| \le$$

$$\leq \left| \lim_{\eta\to 0} \frac{(p-1!)}{2} \left\{ \left[\int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-(t-\vec{n}\eta)} + \int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-(t+\vec{n}\eta)} \right] - \left[\int_L \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-(t-\vec{n}h)} + \int_L \frac{\varphi^{(p-1}(\tau)d\tau}{\tau-(t+\vec{n}h)} \right] \right\} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left[\tau-(t-\vec{n}h)\right]^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t_k') \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\left[\tau-(t-\vec{n}h)\right]^p} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left[\tau-(t+\vec{n}h)\right]^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t_k') \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\left[\tau-(t+\vec{n}h)\right]^p} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \left|\varphi(t_k') - \tilde{\varphi}(t_k')\right| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-(t-\vec{n}h)\right|^p} \right| + \frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \left|\varphi(t_k') - \tilde{\varphi}(t_k')\right| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-(t+\vec{n}h)\right|^p} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(r_1+r_2+r_3+r_4+r_5+r_6).$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности:

$$r_1 = \lim_{\eta\to 0}\left| \int_L \left[\frac{\varphi(\tau)}{\left[\tau-(t+\vec{n}h)\right]^p} - \frac{\varphi(\tau)}{\left[\tau-(t+\vec{n}\eta)\right]^p} \right] d\tau \right| \leq$$

$$\leq (p-1)!\lim_{\eta\to 0}\left| \int_L \left[\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\left[\tau-(t+\vec{n}h)\right]} - \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\left[\tau-(t+n\eta)\right]} \right] d\tau \right| \leq$$

$$\le (p-1)!\lim_{\eta\to 0}\left|\int_L\left[\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)-\varphi^{(p-1)}(t)-\ldots-\dfrac{\varphi^{(r-1)}(t)}{(r-p)!}(\tau-t)^{r-p}}{\tau-(t+\vec{n}h)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)-\varphi^{(p-1)}(t)-\ldots-\dfrac{\varphi^{(r-1}(t)}{(r-p)!}(\tau-t)^{r-p}}{\tau-(t+\vec{n}\eta)}\right]d\tau\right|=$$

$$=(p-1)!\lim_{\eta\to 0}\left|\int_L\frac{\psi(\tau)\left[\left(\tau-(t+\vec{n}\eta)\right)-\left(\tau-(t+\vec{n}h)\right)\right]}{\left(\tau-(t+\vec{n}\eta)\right)\left(\tau-(t+\vec{n}h)\right)}d\tau\right|\le$$

$$\le Ah\lim_{\eta\to 0}\left|\int_L\frac{|\tau-t|^{r+1-p}}{|\tau-t-\vec{n}h||\tau-t-\vec{n}\eta|}d\tau\right|\le Ah\lim_{\eta\to 0}\left|\int_L\frac{|\tau-t|^{r-p}}{|\tau-t-\vec{n}h|}d\tau\right|,$$

где

$$\psi(\tau)=\varphi^{(p-1)}(\tau)-\varphi^{(p-1)}(t)-\ldots-\frac{\varphi^{(r-p)}(t)}{(r-p)!}(\tau-t)^{r-p}.$$

Здесь нужно рассмотреть два случая: 1) $r=p$, 2) $r>p$.
В первом случае

$$\int_L\frac{d\tau}{|\tau-t-\vec{n}h|}\le A|\ln h|$$

и, следовательно, $r_1\le Ah|\ln h|$.
Во втором случае

$$\int_L\frac{|\tau-t|^{r-p}}{|\tau-t-\vec{n}h|}d\tau\le A$$

и, следовательно, $r_1\le Ah$.

Аналогично оценивается r_2.

Проведем оценку r_3.

$$r_3=\left|\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\left[\tau-\left(t-\vec{n}h\right)\right]^p}-\sum_{k=0}^{N-1}\varphi(t_k')\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{d\tau}{\left[\tau-\left(t-\vec{n}h\right)\right]^p}\right|\le\sum_{k=0}^{N-1}\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_k')}{\left[\tau-\left(t-\vec{n}h\right)\right]^p}d\tau\right|\le$$

$$\le A\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\Delta_k^2}{\left(h^2+k^2\Delta_k^2\right)^{p/2}}\le A\left(\Delta^*\right)^2\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\left(h^2+k^2\Delta_*^2\right)^{p/2}}\le$$

$$\le A\left(\Delta^*\right)^2\left(\sum_{k=0}^{N_1}\frac{1}{\left(h^2+k^2\Delta_*^2\right)^{p/2}}+\sum_{k=N_1+1}^{N-1}\frac{1}{\left(h^2+k^2\Delta_*^2\right)^{p/2}}\right)\le$$

$$A\left(\Delta^*\right)^2\left(\frac{N_1}{h^p}+\frac{1}{\Delta_*^p}\sum_{k=N_1+1}^{N-1}\frac{1}{\left(a^2+k^2\right)^{p/2}}\right)\le A\left(\Delta^*\right)^2\left(\frac{N_1}{h^p}+\frac{1}{\Delta_*^p}\sum_{k=N_1+1}^{N}\frac{1}{k^p}\right)\le$$

$$\le A\left(\Delta^*\right)^2\left(\frac{N_1}{h^p}+\frac{1}{\Delta_*^p\left(p-1\right)N_1^{p-1}}\right)\le A\left(\Delta^*\right)^2\frac{1}{h^{p-1}\Delta_*}\le\frac{A}{h^{p-1}N},$$

где Δ_k - длина дуги $\left(t_k,t_{k+1}\right)$, $\Delta^*=\max\Delta_k,\Delta_*=\min\Delta_k$, N_1- наибольшее целое число, при котором сохраняется неравенство $h\ge N_1\Delta_*$, $a=h/\Delta_*$. Аналогично оценивается r_4.

Оценки r_5 и r_6 производятся следующим образом:

$$r_5 = \left| \sum_{k=0}^{N-1} \left(\varphi(t_k') - \tilde{\varphi}(t_k') \right) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\left[\tau - \left(t - \vec{n}h \right) \right]^p} \right| \le \varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{d\tau}{\left[\tau - \left(t - \vec{n}h \right) \right]^p} \right| \le$$

$$\le A\varepsilon \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\left| t_{k+1} - t_k \right|}{\left[k^2 / N^2 + h^2 \right]^{p/2}} = A\varepsilon N^{p-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\left[k^2 + h^2 N^2 \right]^{p/2}} \le A \frac{\varepsilon}{h^{p-1}}.$$

В результате, погрешность квадратурной формулы (2.4.2)

$\left| R_N \right| \le A\left(N^{-1/p} \ln N + \varepsilon N^{1-1/p} \right).$ Теорема доказана.

2.5. Эффективный метод вычисления интеграла Адамара на конечном интервале

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau)$, определенную на сегменте $[-1,1]$, имеющую производные до r-го порядка включительно. Предположим, что функция $\varphi(\tau)$ задана на $[-1,1]$ приближенными значениями $\tilde{\varphi}(\tau)$ такими, что $\left| \varphi(\tau) - \tilde{\varphi}(\tau) \right| \le \varepsilon.$

Для интеграла Адамара

$$A\varphi = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\left(\tau - t \right)^p} \qquad (2.5.1)$$

построим квадратурную формулу следующего вида:

$$A\varphi = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t_k) \left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{\left[\tau - \left(t - ih \right) \right]^p} + \frac{1}{\left[\tau - \left(t + ih \right) \right]^p} \right) d\tau \right] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{\varphi}(t'_j)\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{\left[\tau-(t-ih)\right]^p}+\frac{1}{\left[\tau-(t+ih)\right]^p}\right)d\tau\right]+R_N, \qquad (2.5.2)$$

где $t_k=-1+2k/N,\ k=0,1,\ldots,N-1.$ Сумма $\sum_{k=0}^{N-1}{}'$ означает, что суммирование проводится при $k\neq j-1,j,j+1;\ t'_k=(t_k+t_{k+1})/2,\ h=N^{-1/p}$. Особая точка t находится внутри интервала $[-1+\delta,1-\delta]$, где $\delta>>h.$

Теорема 2.5.1. Пусть $\varphi(\tau)\in W^r(1)$ и $|\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(\tau)|\leq\varepsilon.$ Для интеграла Адамара (2.5.1) квадратурная формула (2.5.2) при $h=O(N^{-1/p})$ имеет погрешность $|R_N|\leq A\left(N^{-1/p}+\varepsilon N^{1-1/p}\right).$

<u>Доказательство</u>. Представим интеграл Адамара (2.5.1) в виде суммы интегралов

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}=\lim_{\eta\to0}\left[\int_{-1}^{t-\eta}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}+\int_{t+\eta}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}+\int_{t-\eta}^{t+\eta}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}\right].$$

Из определения интеграла Адамара следует, что

$$\int_{t-\eta}^{t+\eta}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau-t)^p}=\frac{1}{(p-1)!}\int_{t-\eta}^{t+\eta}\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{(p-1)!\eta}\left\{\varphi^{(p-1)}(t+\eta)-(-1)^1\varphi^{(p-1)}(t-\eta)\right\}-$$

$$-\frac{2!}{(p-1)!\eta^2}\left\{\varphi^{(p-2)}(t+\eta)-(-1)^2\varphi^{(p-2)}(t-\eta)\right\}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{(p-2)!}{(p-1)!\eta^{p-1}}\left\{\varphi(t+\eta)-(-1)^{p-1}\varphi(t-\eta)\right\}. \qquad (2.5.3)$$

Вычислив по частям интегралы

$$\int_{-1}^{t-\eta}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} \quad \text{и} \quad \int_{t+\eta}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p}$$

и воспользовавшись формулой (2.5.3), получим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p}=\frac{1}{(p-1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t}d\tau+\frac{1!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t}-\frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t}\right\}+$$
$$+\frac{2!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t)^2}-\frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t)^2}\right\}+\ldots+\frac{(p-4)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi''(-1)}{(-1-t)^{p-3}}-\frac{\varphi''(1)}{(1-t)^{p-3}}\right\}+$$
$$+\frac{(p-3)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi'(-1)}{(-1-t)^{p-2}}-\frac{\varphi'(1)}{(1-t)^{p-2}}\right\}+\frac{1}{(p-1)}\left\{\frac{\varphi(-1)}{(-1-t)^{p-1}}-\frac{\varphi(1)}{(1-t)^{p-1}}\right\}. \tag{2.5.4}$$

Аналогично,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p}=\frac{1}{(p-1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t+ih}d\tau+\frac{1!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t+ih}-\frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t+ih}\right\}+$$
$$+\frac{2!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t+ih)^2}-\frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t+ih)^2}\right\}+\ldots+\frac{(p-4)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi''(-1)}{(-1-t+ih)^{p-3}}-\frac{\varphi''(1)}{(1-t+ih)^{p-3}}\right\}+$$
$$\begin{aligned}&+\frac{(p-3)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi'(-1)}{(-1-t+ih)^{p-2}}-\frac{\varphi'(1)}{(1-t+ih)^{p-2}}\right\}+\\&+\frac{1}{(p-1)}\left\{\frac{\varphi(-1)}{(-1-t+ih)^{p-1}}-\frac{\varphi(1)}{(1-t+ih)^{p-1}}\right\};\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^{p}}=\frac{1}{(p-1)!}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t-ih}d\tau+\frac{1!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-1)}(-1)}{-1-t-ih}-\frac{\varphi^{(p-1)}(1)}{1-t-ih}\right\}+$$

$$+\frac{2!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi^{(p-2)}(-1)}{(-1-t-ih)^{2}}-\frac{\varphi^{(p-2)}(1)}{(1-t-ih)^{2}}\right\}+\ldots+\frac{(p-4)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi''(-1)}{(-1-t-ih)^{p-3}}-\frac{\varphi''(1)}{(1-t-ih)^{p-3}}\right\}+$$

$$+\frac{(p-3)!}{(p-1)!}\left\{\frac{\varphi'(-1)}{(-1-t-ih)^{p-2}}-\frac{\varphi'(1)}{(1-t-ih)^{p-2}}\right\}+$$

$$+\frac{1}{(p-1)}\left\{\frac{\varphi(-1)}{(-1-t-ih)^{p-1}}-\frac{\varphi(1)}{(1-t-ih)^{p-1}}\right\}. \tag{2.5.6}$$

Погрешность квадратурной формулы (2.5.2) оценивается неравенством

$$|R_N|\le\left|\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^{p}}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{\varphi}(t_k')\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{\left[\tau-(t-ih)\right]^{p}}+\frac{1}{\left[\tau-(t+ih)\right]^{p}}\right)d\tau\right]\right|\le$$

$$\le\left|\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^{p}}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^{p}}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^{p}}\right|+$$

$$+\frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^{p}}+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^{p}}-\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{\varphi}(t_k')\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{1}{\left[\tau-(t-ih)\right]^{p}}+\frac{1}{\left[\tau-(t+ih)\right]^{p}}\right)d\tau\right]\right|\le$$

$$\leq \left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t_k') \int_{t_k}^{t_k} \frac{d\tau}{\left[\tau-(t+ih)\right]^p} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p} - \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\varphi}(t_k') \int_{t_k}^{t_k} \frac{d\tau}{\left[\tau-(t-ih)\right]^p} \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t+ih)^p} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t-ih)^p} \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_k')}{(\tau-t+ih)^p}\,d\tau \right| + \frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_k')}{(\tau-t-ih)^p}\,d\tau \right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(t_k')}{(\tau-t+ih)^p}\,d\tau \right| + \frac{1}{2}\left| \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\varphi(\tau)-\tilde{\varphi}(t_k')}{(\tau-t-ih)^p}\,d\tau \right| =$$

$$= r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5.$$

Оценим каждое слагаемое в отдельности. Из формул (2.5.4) - (2.5.6) следует, что $r_1 = r_1^0 + r_1'(-1) + r_1'(1) + r_1''(-1) + r_1''(1) + \ldots + r_1^{(p-1)}(-1) + r_1^{(p-1)}(1)$, где

$$r_1^0 = \frac{1}{(p-1)!}\left[\int_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t+ih} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t-ih} \right] = O(h);$$

$$r_1'(-1) = \frac{2!}{(p-1)!}\left| \frac{\varphi^{(p-1)}(t_k)}{-1-t_k} - \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi^{(p-1)}(t_k')}{-1-t_k-ih} + \frac{\varphi^{(p-1)}(t_k')}{-1-t_k+ih} \right] \right| = O(h);$$

$$r_1'''(-1)=\frac{3!}{(p-1)!}\left|\frac{\varphi^{(p-1)}(t_k)}{(-1-t_k)^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi^{(p-1)}(t'_k)}{(-1-t_k-ih)^2}+\frac{\varphi^{(p-1)}(t'_k)}{(-1-t_k+ih)^2}\right]\right|=O(h);$$

. . . .

$$r_1^{(p-1)}(-1)=\frac{1}{(p-1)}\left|\frac{\varphi(t_k)}{(-1-t_k)^{p-1}}-\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi(t'_k)}{(-1-t_k-ih)^{p-1}}+\frac{\varphi(t'_k)}{(-1-t_k+ih)^{p-1}}\right]\right|=O(h).$$

Легко показать, что

$$r_1^0=\left|\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t-ih}+\frac{\varphi^{(p-1)}(\tau)}{\tau-t+ih}\right]d\tau\right|=O(h).$$

Следовательно, $r_1=O(h)$.

Слагаемые r_4 и r_5 оцениваются по аналогии с соответствующими выражениями из пункта 2.4. Повторяя сделанные там выкладки, имеем $r_5\le A\varepsilon/h^{p-1}$.

Слагаемые r_2-r_4 оцениваются одинаково. Поэтому ограничимся рассмотрением суммы r_2 при $t\in[t_j,t_{j=1})$

$$r_2=\frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{|\varphi(\tau)-\varphi(t'_k)|}{|\tau-t+ih|^p}d\tau\right|\le\frac{1}{4N^2}\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{\left(\left(t_{k+1}-t_j\right)^2+h^2\right)^{p/2}}+\frac{1}{4N^2h^p}+$$

$$+\frac{1}{4N^2}\sum_{k=j+1}^{N-1}\frac{1}{\left(\left(t_k-t_{j+1}\right)^2+h^2\right)^{p/2}}\le A\left(\frac{1}{N^2h^p}+\frac{1}{Nh^{p-1}}\right).$$

Оценка сумм, встречающихся в предыдущем выражении, проводилась следующим образом:

$$\frac{1}{N^2}\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{\left[\left(t_{k+1}-t_j\right)^2+h^2\right]^{p/2}}=N^{p-2}\sum_{k=0}^{j-2}\frac{1}{\left[\left(k+1-j\right)^2+N^2h^2\right]^{p/2}}=$$

$$=N^{p-2}\sum_{k=0}^{j-2}{}'\frac{1}{\left[\left(k+1-j\right)^2+N^2h^2\right]^{p/2}}+N^{p-2}\sum_{k=0}^{j-2}{}''\frac{1}{\left[\left(k+1-j\right)^2+N^2h^2\right]^{p/2}}=r_2^1+r_2^2,$$

где Σ' означает суммирование по таким k, что $j-k<Nh$, а Σ'' означает суммирование по остальным значениям k. Очевидно,

$$r_2^1\le AN^{p-2}\sum_{k=j-[Nh]}^{j}\frac{1}{N^ph^p}\le\frac{A}{N}h^{1-p};$$

$$r_2^2\le AN^{p-2}\sum_{k=0}^{j-[Nh]}\frac{1}{\left(j-k\right)^p}\le AN^{p-2}\left(Nh\right)^{1-p}=\frac{Ah^{1-p}}{N}.$$

Собирая полученные оценки, имеем $R_N\le A\left(h+N^{-2}h^{-p}+N^{-1}h^{1-p}+\varepsilon/h^{p-1}\right)$. Полагая $h=N^{-1/p}$, получаем окончательную оценку $R_N\le A\left(N^{-1/p}+\varepsilon N^{1-1/p}\right)$. Теорема доказана.

2.6. Эффективный метод вычисления интегралов Адамара на бесконечном интервале

Будем вычислять интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} \tag{2.6.1}$$

в предположении, что $\varphi(t)$ представима в виде

$$\varphi(t) = \rho(t)\psi(t),$$

где $\rho(t)$ - весовая функция.

В качестве весовых функций используются функции

$$\rho_1(t) = a^{-|t|}, \quad \rho_2(t) = e^{-t^2}, \quad \rho_3(t) = \frac{1}{\left(1+t^2\right)^{\alpha}}.$$

Через $W^r(1,K)$ обозначим класс функций $\varphi(t)$, определенных на числовой оси, имеющих непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка включительно, кусочно-непрерывные производные r-го порядка и удовлетворяющие условиям

$$\max\left|\varphi^{(r)}(t)\right| \le 1, \quad \max\left(\left|\varphi(t), \left|\varphi'(t)\right|, \ldots, \left|\varphi^{(r-1)}(t)\right|\right|\right) \le K.$$

Будем говорить, что $\varphi(t) \in W_\rho^r(1,K)$, если $\varphi(t) = \rho(t)\psi(t)$, где $\rho(t)$- весовая функция, а $\psi(t) \in W^r(1,K)$.

Введем обозначения: N - целое число;

$$t'_{k,l} = k + {}^{1}\!\big/_{N_k^1}, \quad k = -A_1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, A_1, \quad l = 0, 1, \ldots, N_k^1, \quad A_1 = \left[\log_a N\right],$$

$$N_k^1 = \left[{}^{N}\!\big/_{a^k}\right] \textit{при } k = 0, 1, \ldots, A_1, \quad N_k^l = \left[{}^{N}\!\big/_{a^{|k|-1}}\right] \textit{при } k = -A_1, \ldots, -1;$$

$$t_{k,l}^2 = k + {}^{1}\!\big/_{N_k^2}, k = -A_2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, A_2, l = 0, 1, \ldots, N_k^2, A_2 = \left[(\ln N)^{1/2}\right],$$

$$N_k^2 = \left[{}^{N}\!\big/_{e^{k^2}}\right] \textit{при } k \ge 0, N_k^2 = \left[{}^{N}\!\big/_{e^{(|k|-1)^2}}\right] \textit{при } k < 0;$$

$$t_{k,l}^3 = k + {}^{1}\!\big/_{N_k^3}, \quad k = -A_3, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, A_3, l = 0, 1, \ldots, N_k^3,$$

$$A_3 = \left[\left({}^{N}\!\big/_{\ln N}\right)^{1/2\alpha - 1}\right], \quad N_k^3 = \left[{}^{N}\!\big/_{k^{2\alpha-1}}\right] \textit{при } k \ne 0, N_0^3 = N;$$

$$\overline{t}_{k,l} = \frac{t_{k,l} + t_{k,l+1}}{2}, \quad \alpha > 0.$$

Теорема 2.6.1. Пусть $\varphi(\tau) \in W^r_{\rho_i}(1, K)$, $i = 1,2,3$. Квадратурная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t'_k)\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{\left[\tau - (t - ih)\right]^p} + \frac{1}{\left[\tau - (t + ih)\right]^p}\right) d\tau\right] + R_N, \qquad (2.6.2)$$

предназначенная для вычисления интеграла Адамара (2.6.1) имеет погрешность $|R_N| \le O\left(N^{-1/p}\right)$.

Доказательство. Оценка погрешности квадратурной формулы (2.6.2) проводится по формуле

$$|R_N| \le \left|\int_{-\infty}^{-A} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p}\right| + \left|\int_{A}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p}\right| +$$

$$+ \left|\int_{-A}^{A} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau - t)^p} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \varphi(t'_k)\left[\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{1}{\left[\tau - (t - ih)\right]^p} + \frac{1}{\left[\tau - (t + ih)\right]^p}\right) d\tau\right]\right| = r_1 + r_2 + r_3.$$

Оценка первых двух слагаемых $r_1 + r_2$ проведена в пункте 2.3, где показано, что $r_1 + r_2 = O(N^{-1/p})$. Оценка третьего слагаемого r_3 может быть проведена по аналогии с рассуждениями, проведенными в пункте 2.5, поскольку интервал $[-A, A]$ конечный. Нетрудно видеть, что $r_3 = O\left(N^{-1/p}\right)$. Объединяя эти оценки, убеждаемся в справедливости теоремы 2.6.1.

Г Л А В А 3

Кубатурные формулы для вычисления двойных интегралов Адамара

3.1. Оптимальные кубатурные формулы для вычисления двойных интегралов Адамара от периодических функций

Рассмотрим интеграл

$$I\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - s_1}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - s_2}{2}} \qquad (3.1.1)$$

(p_1, p_2 - четные числа), для вычисления которого применим кубатурную формулу

$$I\varphi = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_{ki}(s_1,s_2)\varphi(x_k,y_i) + R_{mn}(s_1,s_2,x_k,y_l,p_{kl},\varphi), \qquad (3.1.2)$$

определяемую вектором $(X,Y;P)$ с произвольными узлами

$$0 \le x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n \le 2\pi; \quad 0 \le y_1 \prec y_2 \prec \ldots \prec y_m \le 2\pi$$

и коэффициентами p_{kl}. Положим $\varphi(\sigma_1,\sigma_2) \in \overline{W}^{r_1 r_2}(1)$.

Теорема 3.1.1. Пусть $\mathrm{M} = \overline{W}^{r_1 r_2}(1)$ и интеграл (3.1.1) вычисляется по кубатурной формуле (3.1.2). Тогда

$$\xi_{nm}[\mathrm{M}] \ge \frac{4(1+o(1))}{nm(p_1-1)(p_2-1)2^{p_1+p_2-2}}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{p_1}\left(\frac{m}{\pi}\right)^{p_2}\left(\frac{2K_{r_1}\pi}{n^{r_1}} + \frac{2K_{r_2}\pi}{m^{r_2}} + \frac{4K_{r_1}K_{r_2}\pi^2}{n^{r_1}m^{r_2}}\right).$$

Среди всевозможных кубатурных формул, использующих подынтегральную функцию в $N = nm$ узлах, оптимальной по порядку является кубатурная формула

$$I\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{s_{nm}[(\sigma_1,\sigma_2)]d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\dfrac{\sigma_1-s_1}{2}\sin^{p_2}\dfrac{\sigma_2-s_2}{2}}+R_N\ ,\quad s_{nm}[\varphi]=s_n^{\sigma_1}[s_m^{\sigma_2}[\varphi]],\qquad (3.1.3)$$

где $s_n[\varphi]\in C^{r_1}$ $(s_v[\varphi]\in C^{r_2})$ интерполяционный сплайн порядка $r_1(r_2)$ по равномерному разбиению $v_r=\dfrac{2k\pi}{n},k=0,1,\ldots,n,(w_k=\dfrac{2k\pi}{m},k=0,1,\ldots,m)$.

Погрешность кубатурной формулы определяется неравенством

$$R_N=O(n^{p_1-1}m^{p_2-1}(n^{-r_1}+m^{-r_2}))\,.$$

Доказательство. Вначале получим оценку снизу погрешности кубатурной формулы (3.1.2.) на классе $\overline{W}^{r_1r_2}(1)$ на произвольном векторе $(X,Y;P)$ узлов и весов.

Обозначим через $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)\in\overline{W}^{r_1r_2}(1)$;

2) $\min\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)=\varphi^*(x_k,y_j)=0,(k=1,2,\ldots,n;j=1,2,\ldots.m)$;

3) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2\geq\frac{2K_{r_1}\pi}{n^{r_1}}+\frac{2K_{r_2}\pi}{m^{r_2}}+\frac{4K_{r_1}K_{r_2}n^2}{n^{r_1}m^{r_2}}.$

Покажем , что такая функция существует. В работе В.П. Моторного [31] показано, что на любом множестве узлов $s_k,k=1,2.\ldots,N,$ существует неотрицательная функция $\varphi(t)=W^r(1),$ удовлетворяющая двум условиям:

1) $\varphi(s_k)=0,k=1,2,\ldots,N;$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(t)dt\geq\frac{K_r}{n^r}.$

Определим функцию $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$, о которой шла речь выше, формулой

$$\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) = \left(\varphi_1(\sigma_1) + \varphi_2(\sigma_2) + \varphi_1(\sigma_1)\varphi_2(\sigma_2)\right)/ A,$$

где $\varphi_1(\sigma_1) \in W^{r_1}(1)$ - неотрицательная функция, обращающаяся в нуль в узлах $x_k, k = 1,2,\ldots,n;$ $\varphi_2(\sigma_2) \in W^{r_2}(1)$ - неотрицательная функция, обращающаяся в нуль в узлах $y_j, j = 1,2,\ldots,m; A$ - константа, подбираемая из условия, чтобы $\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) \in W^{r_1 r_2}(1)$. Отметим, что здесь идет речь о функциях, существование которых доказано в работе В.П. Моторного [31] и для которых выполнены условия 1), 2). Нетрудно видеть, что константа А существует и что

$$A \le 1 + K_r / N^r,$$

где $N = \min(n,m)$.

Разделим сегмент $(0,2\pi)$ на n и m равных частей точками $v_k = 2k\pi/n$ и $w_j = 2j\pi/m$. В результате получим прямоугольники $\lfloor v_k, v_{k+1}; w_j, w_{j+1} \rfloor$. Возьмем произвольную точку (v_k, w_j) и представим интеграл в виде суммы

$$I\varphi^*(v_k,w_j) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) \frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2 \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{[n/2]-1} \int_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) \frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int_0^{2\pi} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2) \frac{1}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}} d\sigma_1 d\sigma_2 \ge$$

$$\geq \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \frac{\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int_{v_{k--1}}^{v_{k-l}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int_{w_{j+i}}^{w_{j-i}} \frac{\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int_{v_{k-}}^{v_{k-l-1}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}} \frac{\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{[n/2]-1} \int_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \sum_{i=1}^{[m/2]-1} \int_{w_{j+1}}^{w_{j+i+1}} \frac{\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2}{\sin^{p_1}\frac{\sigma_1 - v_k}{2}\sin^{p_2}\frac{\sigma_2 - w_j}{2}} \geq$$

$$\left. + \int_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int_{w_{j-i-1i}}^{w_{j-i}} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 + \int_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}} \int_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}} \varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2 \right).$$

Поскольку максимальное значение функции $I\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)$ не меньше его среднего значения, то

$$\max I\varphi^*(s_1,s_2) \geq \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} I\varphi^*(v_j,w_k).$$

Усредним интеграл

$$\frac{1}{nm}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{[n/2]-1}\sum_{i=1}^{[m/2]-1}\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{v_l}{2}\sin^{p_2}\frac{w_i}{2}}\bullet\left(\int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}}\int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}}\int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2+\int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}}\int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2+\int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}}\int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2\right)=$$

$$=\frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{[n/2]-1}\sum_{k=1}^{[m/2]-1}\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{v_l}{2}\sin^{p_2}\frac{w_i}{2}}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}}\int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}}\varphi^*\,d\sigma_1 d\sigma_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{v_{k-l-1}}^{v_{k-l}}\int\limits_{w_{j+i}}^{W_{j+i+1}}\varphi^*\,d\sigma_1 d\sigma_2+\int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}}\int\limits_{w_{j-i-1}}^{w_{j-i}}\varphi^*\,d\sigma_1 d\sigma_2+\int\limits_{v_{k+l}}^{v_{k+l+1}}\int\limits_{w_{j+i}}^{w_{j+i+1}}\varphi^*\,d\sigma_1 d\sigma_2\right)=$$

$$=\frac{4}{nm}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2\sum_{j=1}^{[n/2]-1}\frac{1}{\sin^{p_1}\frac{v_j}{2}}\sum_{k=1}^{[m/2]-1}\frac{1}{\sin^{p_2}\frac{w_i}{2}}.$$

Сумма вида $\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{\sin^{p}\frac{v_l}{2}}$ была оценена в п. 2.2.

Воспользовавшись этой оценкой, имеем

$$\max I\varphi^*(s_1,s_2)\geq\frac{4(1+o(1))}{2^{p_1+p_2-2}nm}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi^*(\sigma_1,\sigma_2)d\sigma_1 d\sigma_2\frac{(n/\pi)^{p_1}}{(p_1-1)}\frac{(m/\pi)^{p_2}}{(p_2-1)}=$$

$$=\frac{(1+o(1))}{2^{p\ \ +p_2-2}}\left(\frac{2K_{r_1}\pi}{n^{r_1}}+\frac{2K_{r_2}\pi}{m^{r_2}}+\frac{4K_{r_1}K_{r_2}\pi^2}{n^{r_1}m^{r_2}}\right)\frac{4}{nm}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{p_1}\frac{1}{p_1-1}\left(\frac{m}{\pi}\right)^{p_2}\frac{1}{p_2-1}.$$

Оценка снизу получена.

При оценке R_N кубатурной формулы повторяем рассуждения, сделанные в п.2.2 для квадратурной формулы (2.2.1) , и в итоге получаем оценку

$$R_N = O(n^{p_1-1}m^{p_2-1}(n^{-r_1}+m^{-r_2})).$$

Отметим, что подробное доказательство приведено в работе [18]. Из сопоставления оценки снизу и оценки величины погрешности R_N следует справедливость теоремы.

3.2. Кубатурные формулы для вычисления интеграла Адамара на топологическом произведении двух замкнутых контуров

Рассмотрим интеграл Адамара

$$\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}, \tag{3.2.1}$$

где L_1 и L_2 замкнутые гладкие контуры на комплексных плоскостях.

Функция $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ определена на контуре $L = L_1\times L_2$ и имеет производные до r_1-го порядка по переменной τ_1 и r_2-го порядка по переменной τ_2, причем $\max\left|\varphi_{\tau_1}^{(r_1)}(\tau_1,\tau_2)\right| \le 1, \max\left|\varphi_{\tau_2}^{(r_2)}(\tau_1,\tau_2)\right| \le 1, \max\left|\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(r_1,r_2)}\right| \le 1,$ т.е.

$$\varphi(\tau_1,\tau_2)\in \overline{W}^{r_1 r_2}(1).$$

Предположим, что функция $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ задана с погрешностью, т.е. вместо $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ задана $\tilde{\varphi}(\tau_1,\tau_2)$, такая, что $\max\left|\varphi(\tau_1,\tau_2)-\tilde{\varphi}(\tau_1,\tau_2)\right| \le \varepsilon.$ Проведем разбиение контура L_1 на N_1 равных частей точками t_{k_1} и контура L_2 на N_2 равных частей точками t_{k_2} и построим следующую кубатурную формулу:

$$A\varphi=\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\widetilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1}+1}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2}+1}\left[\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1+\overline{n_1}h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+\overline{n_2}h_2\right)\right]^{p_2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{[\tau_1-(t_1+\overline{n_1}h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\overline{n_2}h_2)]^{p_2}}+\frac{1}{[\tau_1-(t_1-\overline{n_1}h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\overline{n_2}h_2)]^{p_2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{[\tau_1-(t_1-\overline{n_1}h_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\overline{n_2}h_2)]^{p_2}}\right]d\tau_1 d\tau_2+R_{N_1N_2}\,, \qquad (3.2.2)$$

где t'_{k_1} - точка контура L_1,равноотстоящая от t_{k_1} и t_{k_1+1}, t'_{k_2} -точка контура L_2, равноотстоящая от t_{k_2} и t_{k_2+1}; $h_1=N_1^{-\frac{1}{p_1}}$, $h_2=N_2^{-\frac{1}{p_2}}$, $\overline{n_1}$ - единичная нормаль в направлении вогнутости контура L_1 в точке t'_{k_1}, точка $t'_{k_1}-\overline{n_1}h_1$ находится внутри контура L_1, но не на контуре L_1; точка $t'_{k_2}-\overline{n_2}h_2$ находится внутри контура L_2, но не на контуре L_2.

Решение модельных примеров показало высокую эффективность кубатурной формулы (3.2.2). Однако теоретическая оценка погрешности кубатурной формулы (3.2.2) при $p_1,p_2>2$ связана с громоздкими вычислениями и полученные оценки труднообозримы. Для простоты ниже ограничимся случаем $p_1=p_2=2$.

Теорема 3.2.1. Пусть функция $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in W^{r_1r_2}(1)$ задана на замкнутых гладких контурах L_1 и L_2 значениями $\widetilde{\varphi}(t_{k_1},t_{k_2})$, причем $\left|\varphi(\tau_1,\tau_2)-\widetilde{\varphi}(t_{k_1},t_{k_2})\right|\le\varepsilon$. Погрешность кубатурной формулы (3.2.2) для вычисления интеграла Адамара (3.2.1) при $h_1=N_1^{-\frac{1}{p_1}}$, $h_2=N_2^{-\frac{1}{p_2}}$ определяется неравенством $\left|R_{N_1N_2}\right|\le A(h_1h_2|\ln h_1||\ln h_2|+\varepsilon/h_1h_2)$.

<u>Доказательство</u>. Используя формулы Сохоцкого для двумерного интеграла типа Коши, приведенные Ф.Д. Гаховым в монографии «Краевые задачи», докажем справедливость формулы

$$\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=\int_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=$$

$$=\Phi^{++}(\tau_1,\tau_2)+\Phi^{+-}(\tau_1,\tau_2)+\Phi^{-+}(\tau_1,\tau_2)+\Phi^{--}(\tau_1,\tau_2), \qquad (3.2.3)$$

где

$$\Phi^{++}(\tau_1,\tau_2)=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\int_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\overline{n}_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\overline{n}_2\eta_2)]^{p_2}},$$

$$\Phi^{+-}(\tau_1,\tau_2)=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\int_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1-(t_1-\overline{n}_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\overline{n}_2\eta_2)]^{p_2}},$$

$$\Phi^{-+}(\tau_1,\tau_2)=\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\int_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\overline{n}_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2-\overline{n}_2\eta_2)]^{p_2}},$$

$$\Phi^{--}(\tau_1,\tau_2)=\lim_{\substack{\eta_2\to 0\\ \eta_2\to 0}}\int_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{[\tau_1-(t_1+\overline{n}_1\eta_1)]^{p_1}[\tau_2-(t_2+\overline{n}_2\eta_2)]^{p_2}}.$$

По определению интеграла Адамара [1]

$$\int_L\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=\frac{1}{(p_1-1)(p_2-1)}\int_L\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}d\tau_1 d\tau_2,$$

где $$D^{(p_1,p_2)}\varphi=D^{(p_1)}D^{(p_2)}\varphi,\ D^{(p_i)}\varphi=\frac{\partial^{p_i}\varphi}{\partial x_i^{p_i}}.$$

Поэтому

$$\int_L \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}} \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\Bigg[\int_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-\overrightarrow{n_1}\eta_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-\overrightarrow{n_2}\eta_2)\right]}+$$

$$\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]^{p_2}} =$$

$$+\int_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\overrightarrow{n_1}\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{m}\eta_2\right)\right]}+ \qquad \int_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+\overrightarrow{n_2}\eta_2\right)\right]}+$$

$$+\int_L \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\overrightarrow{n_1}\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+\overrightarrow{n_2}\eta_2\right)\right]}\;\Bigg]. \qquad (3.2.4)$$

По формуле Коши

$$\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]^{p_2}} =$$

$$= \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2h_2}\right)\right]};$$

$$\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]^{p_2}} =$$

$$= \quad \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int_{L_1}\int_{L_2} \frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]};$$

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2+\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]};$$

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]^{p_2}}=$$

$$=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]}.$$

Таким образом, формулы (3.2.4) и (3.2.5) доказывают формулу (3.2.3).

Рассмотрим отдельно интеграл:

$$\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]}=$$

$$=\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,t_2)+D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2h_2}\right)\right]}d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]}d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,t_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]}d\tau_1 d\tau_2+$$

$$+\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\overrightarrow{n_1}h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\overrightarrow{n_2}h_2\right)\right]}d\tau_1 d\tau_2=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Второй, третий и четвертый интегралы справа вычислим по формуле Коши

$$I_2=\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=\int_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}d\tau_2\bullet\begin{cases}2\pi i, \textit{если } t_1-\vec{n}_1h_1 \textit{ лежит внутри } L_1,\\ 0 \textit{ в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$I_3=\int_{L_1}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,t_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]}d\tau_1\bullet\begin{cases}2\pi i, \textit{если } t_2-\vec{n}_2h_2 \textit{ лежит внутри } L_2,\\ 0 \quad \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

$$I_4=D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)\int_{L_1}\frac{d\tau_1}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]}\int_{L_2}\frac{d\tau_2}{\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}=$$

$$=D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)\bullet\begin{cases}-4\pi^2, \textit{если } t_1-\vec{n}_1h_1 \textit{ лежит внутри } L_1 \textit{ и } t_2-\vec{n}_2h_2 \textit{ лежит внутри } L_2;\\ 0 \quad \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Таким образом, все интегралы, за исключением I_1, сводятся к одномерным интегралам. Оценка погрешности кубатурной формулы (3.2.2) следующая:

$$\left|R_{N_1N_2}\right| = \left| \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}} - \frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\tilde{\varphi}\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\left[\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}+\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}+\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}+$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}\right]d\tau_1 d\tau_2\right| \le$$

$$\le \left| \lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}} \frac{1}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\left\{\left[\int_{L_1}\int_{L_2}\left(\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2\eta_2\right)\right]}+\right.\right.\right.\right.$$

$$+\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-n_2\eta_2\right)\right]}+\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+n_2\eta_2\right)\right]}+$$

$$\left.\left.\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2\eta_2\right)\right]}\right)d\tau_1 d\tau_2\right]-$$

$$-\left[\int_{L_1}\int_{L_2}\left(\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]}+\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2h_2\right)\right]}+\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2h_2\right)\right]}\right)d\tau_1 d\tau_2\right]\right\}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1+\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1+\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2+\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2+\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1+\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2+\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}-\right.$$

$$-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}\Bigg|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)-\tilde{\varphi}\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\right|\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)-\tilde{\varphi}\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\right|\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}\right|+$$

$$+\frac{1}{4}\left|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)-\tilde{\varphi}\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\right|\int\limits_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int\limits_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1+\vec{n}_1h_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+\vec{n}_2h_2\right)\right]^{p_2}}\right|=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}r_{ij}.$$

Оценка погрешности $\left|R_{N_1N_2}\right|$ складывается из суммы трех групп слагаемых $r_{1j}+r_{2j}+r_{3j}$, причем каждая группа состоит из четырех слагаемых. В первую группу входят слагаемые вида:

$$|r_{11}|=\Bigg|\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\frac{1}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\Bigg[\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1\eta_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2\eta_2\right)\right]}-$$

$$-\int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2}\frac{D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right]\left[\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right]}\Bigg]\Bigg|.$$

Во вторую группу входят слагаемые вида:

$$|r_{21}|=\frac{1}{4}\left|\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}\right|.$$

В третью группу входят слагаемые вида:

$$|r_{31}|=\frac{1}{4}\left|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)-\tilde{\varphi}\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\right|\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]^{p_2}}\right|.$$

Оценим по одному слагаемому из каждой группы. Проведем оценку r_{11}.

$$|r_{11}|=\frac{1}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\left|\int_{L_1}\int_{L_2}\left[D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\bullet\right.\right.$$

$$\left.\left.\bullet\frac{\vec{n}_1(\tau_2-t_2)(h_1-\eta_1)+\vec{n}_2(\tau_1-t_1)(h_2-\eta_2)+\vec{n}_1\vec{n}_2(h_1h_2-\eta_1\eta_2)}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1\eta_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2\eta_2)\right]\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}\right]d\tau_1 d\tau_2\right|=$$

$$=\frac{1}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\lim_{\substack{\eta_1\to 0\\ \eta_2\to 0}}\left|\int_{L_1}\int_{L_2}\left[D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-\right.\right.$$

$$\left.-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,t_2)+D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,t_2)\right]\bullet$$

$$\left.\bullet\frac{\vec{n}_1(\tau_2-t_2)(h_1-\eta_1)+\vec{n}_2(\tau_1-t_1)(h_2-\eta_2)+\vec{n}_1\vec{n}_2(h_1h_2-\eta_1\eta_2)}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1\eta_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2\eta_2)\right]\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}\right]d\tau_1 d\tau_2\right|.$$

Следуя Ф.Д. Гахову , заметим, что функция

$$\varphi_{12}(\tau_1,\tau_2)=D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_1,\tau_2)-D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(\tau_1,t_2)+D^{(p_1-1,p_2-1)}\varphi(t_2,t_1)$$

принадлежит классу функций Гельдера $H_{1/2,1/2}$. Тогда

$$\left|\varphi_{12}(\tau_1,\tau_2)\right|\le A_{12}\left|t_1-\tau_1\right|^{1/2}\left|t_2-\tau_2\right|^{1/2}$$

и

$$|r_{11}|\le\left|\frac{A_{12}}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\left[h_1\int_{L_1}\frac{(\tau_1-t_1)^{-1/2}}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]}d\tau_1\int_{L_2}\frac{(\tau_2-t_2)^{1/2}}{\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}d\tau_2+\right.\right.$$

$$+h_2\int_{L_1}\frac{(\tau_1-t_1)^{1/2}}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]}d\tau_1\int_{L_2}\frac{(\tau_2-t_2)^{-1/2}}{\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}d\tau_2+$$

$$\left.\left.+h_1h_2\int_{L_1}\frac{(\tau_1-t_1)^{-1/2}}{\left[\tau_1-(t_1-\vec{n}_1h_1)\right]}d\tau_1\int_{L_2}\frac{(\tau_2-t_2)^{-1/2}}{\left[\tau_2-(t_2-\vec{n}_2h_2)\right]}d\tau_2\right]\right|.$$

Двойной интеграл распался на сумму произведений криволинейных интегралов. Каждый из них оценивается на замкнутых кривых L_1 и L_2. Выделим на кривой L_1 два интервала: L_1' и L_1'', где L_1'- дуга, отсекаемая от L_1 окружностью радиуса h_1 с центром в точке t_1, $L_1''=L_1\setminus L_1'$. Тогда

$$\left|\int_{L_1'}\frac{d(\tau_1-t_1)}{\left|\tau_1-t_1\right|^{1/2}(\tau_1-t_1+\vec{n}_1h_1)}\right|\le\frac{A_1}{h_1^{1/2}},$$

$$\left|\int_{L_1''}\frac{d(\tau_1-t_1)}{\left|\tau_1-t_1\right|^{1/2}(\tau_1-t_1+\vec{n}_1h_1)}\right|\le\frac{A_1}{h_1^{1/2}}\left|\ln h_1\right|.$$

Имеем:

$$\left|\int_{L_1} \frac{d(\tau_1 - t_1)}{|\tau_1 - t_1|^{1/2}(\tau_1 - t_1 + \vec{n}_1 h_1)}\right| \le \frac{A_1}{h_1^{1/2}}|\ln h_1|.$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке интеграла

$$\left|\int_{L_2} \frac{d\tau_2}{(\tau_2 - t_2)^{1/2}(\tau_2 - t_2 + \vec{n}_2 h_2)}\right| \le \frac{A_2}{h_2^{1/2}}|\ln h_2|.$$

Первое слагаемое оценивается следующим образом:

$$|r_{11}| \le \frac{A_{12}}{4(p_1-1)!(p_2-1)!}\left[h_1\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{1/2} + h_2\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{1/2} + (h_1 h_2)^{1/2}\right]|\ln h_1||\ln h_2|.$$

Оценим одно слагаемое из второй группы, полагая, что $t_i \in [t_j, t_{j+1}), i = 1,2,$ и что $\max\left(\max\left|D^{(1,0)}\varphi(t_1,t_2)\right|, \max\left|D^{(0,1)}\varphi(t_1,t_2)\right|\right) \le 1.$

$$|r_{21}| \le \left|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{\left|\tau_1 - \frac{t_{k_1+1}+t_{k_1}}{2}\right||d\tau_1||d\tau_2|}{|\tau_1 - (t_1 - \vec{n}_1 h_1)|^{p_1}|\tau_2 - (t_2 - \vec{n}_2 h_2)|^{p_2}}\right| \le$$

$$\le \left|2\sum_{k_1=1}^{N_1}{}'\sum_{k_2=1}^{N_2}{}'\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{\left|\tau_1 - \frac{t_{k_1+1}+t_{k_1}}{2}\right||d\tau_1||d\tau_2|}{|\tau_1 - (t_1 - \vec{n}_1 h_1)|^{p_1}|\tau_2 - (t_2 - \vec{n}_2 h_2)|^{p_2}}\right| +$$

$$+ \left|2\sum_{k_1=j_1-1}^{j_1+1}\sum_{k_2=j_2-1}^{j_2+1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{\left|\tau_1 - \frac{t_{k_1+1}+t_{k_1}}{2}\right||d\tau_1||d\tau_2|}{|\tau_1 - (t_1 - \vec{n}_1 h_1)|^{p_1}|\tau_2 - (t_2 - \vec{n}_2 h_2)|^{p_2}}\right| +$$

$$+\left|2\sum_{k_1=j_1-1}^{j_1+1}\sum_{k_2=j_2+2}^{N_2-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{\left|\tau_1-\frac{t_{k_1+1}+t_{k_1}}{2}\right||d\tau_1||d\tau_2|}{\left|\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right|^{p_1}\left|\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right|^{p_2}}\right|+$$

$$+\left|2\sum_{k_1=j_1-1}^{j_1+2}\sum_{k_2=0}^{j_2-2}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{\left|\tau_1-\frac{t_{k_1+1}+t_{k_1}}{2}\right||d\tau_1||d\tau_2|}{\left|\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right|^{p_1}\left|\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right|^{p_2}}\right|+$$

$$+\left|2\sum_{k_1=0}^{j_1-2}\sum_{k_2=j_2-1}^{j_2+1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{\left|\tau_1-\frac{t_{k_1+1}+t_{k_1}}{2}\right||d\tau_1||d\tau_2|}{\left|\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right|^{p_1}\left|\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right|^{p_2}}\right|+$$

$$+\left|2\sum_{k_1=j_1+2}^{N_1-1}\sum_{k_2=j_2-1}^{j_2+1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{\left|\tau_1-\frac{t_{k_1+1}+t_{k_1}}{2}\right||d\tau_1||d\tau_2|}{\left|\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1h_1\right)\right|^{p_1}\left|\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2h_2\right)\right|^{p_2}}\right|=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6,$$

где Σ' означает суммирование по всем интервалам, за исключением дуг $\left[t_{j_i-1},t_{j_i+2}\right]$ $i=1,2$. Проводя оценку I_1-I_6 при $p_1=p_2=2$, получаем

$$I_1\le\frac{4}{N_1N_2h_1h_2}\le Ah_1h_2,\ldots,I_6\le\frac{4}{N_1N_2h_1h_2}\le Ah_1h_2.$$

Следовательно, $|r_{21}|<Ah_1h_2$.

Оценим одно из слагаемых последней группы

$$\left|r_{31}\right| \le \frac{\varepsilon}{4}\left|\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\frac{\left|d\tau_1 d\tau_2\right|}{\left|\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1 h_1\right)\right|^{p_1}\left|\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2 h_2\right)\right|^{p_2}}\right| \le$$

$$\le \varepsilon\left|\sum_{k_1=0}^{N_1/2}\int_{t_{k_1+j_1}}^{t_{k_1+j_1+1}}\frac{\left|d\tau_1\right|}{\left|\tau_1-\left(t_1-\vec{n}_1 h_1\right)\right|^{p_1}}\right|\left|\sum_{k_2=0}^{N_2/2}\int_{t_{k_2+j_2}}^{t_{k_2+j_2+1}}\frac{\left|d\tau_2\right|}{\left|\tau_2-\left(t_2-\vec{n}_2 h_2\right)\right|^{p_2}}\right|.$$

При $p_1 = p_2 = 2$ получаем следующую оценку

$$\left|r_{31}\right| \le \varepsilon / h_1 h_2 .$$

Собирая оценки каждого слагаемого, получаем оценку погрешности кубатурной формулы при $p_1 = p_2 = 2$:

$$\left|R_{N_1 N_2}\right| = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} r_{ij} = A\left(h_1 h_2\left|\ln h_1\right|\left|\ln h_2\right| + \frac{\varepsilon}{h_1 h_2}\right).$$

Теорема доказана.

3.3. Кубатурная формула для вычисления интеграла Адамара на топологическом произведении конечных интервалов

Рассмотрим функцию $\varphi(\tau_1,\tau_2) \in \bar{W}^{r_1 r_2}(1)$ на топологическом произведении двух конечных отрезков $[-1,1]\times[-1,1]$. Предположим, что функция $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ задана своими приближениями $\tilde{\varphi}(\tau_1,\tau_2)$, причем $\left|\varphi(\tau_1,\tau_2)-\tilde{\varphi}(\tau_1,\tau_2)\right| \le \varepsilon$. Для интеграла Адамара

$$A\varphi = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi\left(\tau_1,\tau_2\right)}{\left(\tau_1-t_1\right)^{p_1}\left(\tau_2-t_2\right)^{p_2}}d\tau_1 d\tau_2 \qquad (3.3.1)$$

построим кубатурную формулу следующего вида:

$$A\varphi=\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\varphi\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\left[\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1-ih_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-ih_2\right)\right]^{p_2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1-ih_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+ih_2\right)\right]^{p_2}}+\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1+ih_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2-ih_2\right)\right]^{p_2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{\left[\tau_1-\left(t_1+ih_1\right)\right]^{p_1}\left[\tau_2-\left(t_2+ih_2\right)\right]^{p_2}}\right]d\tau_1 d\tau_2+R_{N_1N_2}, \qquad (3.3.2)$$

где точки t_k получены путем равномерного разбиения отрезка на N частей: $t_k=-1+2k/N$, $(k=0,1,\ldots,N)$; $t'_k=\frac{t_k+t_{k+1}}{2}$; $h_1=N^{-1/p_1}$; $h_2=N^{-1/p_2}$.

Теорема 3.3.1. Пусть $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in\bar{W}^{r_1r_2}(1)$ и $\left|\varphi(\tau_1,\tau_2)-\tilde{\varphi}(\tau_1,\tau_2)\right|\le\varepsilon.$ Для интеграла Адамара (3.3.1) кубатурная формула (3.3.2) при $\min(r_1,r_2)>1,\;\; h_1=h_2=h$ и $p=2$ имеет погрешность $\left|R_{N_1N_2}\right|=O\left(h^2\left|\ln h\right|+\varepsilon/h^2\right).$

Доказательство. Представим интеграл (3.3.1) в виде суммы

$$A\varphi=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=\lim_{\eta\to 0}\left[\int_{-1}^{t_1-\eta}\int_{-1}^{t_2-\eta}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}++\int_{t_1+\eta}^{1}\int_{-1}^{t_2-\eta}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{t_1-\eta}\int_{t_2+\eta}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+\int_{t_1+\eta}^{1}\int_{t_2+\eta}^{1}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}+\frac{\psi(\eta)}{\eta^{p_1+p_2-2}}\right].$$

По определению интеграла Адамара функция $\psi(\eta)$ выбирается таким образом, чтобы существовал предел. Доказательство теоремы при произвольных p_1 и p_2 трудоемкое, поэтому проведем доказательство в предположении $p_1 = p_2 = 2$. Это доказательство отличается от общего случая лишь меньшим числом слагаемых в каждом интеграле.

Нетрудно видеть, что

$$I_1 = \int_{-1}^{t_1-\eta}\int_{-1}^{t_2-\eta} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^2(\tau_2-t_2)^2} = \int_{-1}^{t_1-\eta}\int_{-1}^{t_2-\eta} \frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} +$$

$$\int_{-1}^{t_1-\eta} \frac{D^{(1,0)}\varphi(\tau_1,-1)\,d\tau_1}{(\tau_1-t_1)(1+t_2)} + \int_{-1}^{t_2} \frac{D^{(0,1)}\varphi(-1,\tau_2)\,d\tau_2}{(1+t_1)(\tau_2-t_2)} + \frac{\varphi(-1,-1)}{(1+t_1)(1+t_2)} + \psi_1(\eta).$$

Представляя аналогичным образом остальные слагаемые правой части формулы (3.3.2), имеем:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^2(\tau_2-t_2)^2} = \lim_{\eta\to 0}\left[\int_{-1}^{t_1-\eta}\int_{-1}^{t_2-\eta} \frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} + \int_{t_1+\eta}^{1}\int_{-1}^{t_2-\eta} \frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} +\right.$$

$$\left.+\int_{-1}^{t_1-\eta}\int_{t_2+\eta}^{1} \frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} + \int_{t_1+\eta}^{1}\int_{t_2+\eta}^{1} \frac{D^{(1,1)}\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}\right] + \frac{1}{(-1-t_2)}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)\,d\tau_1}{(\tau_1-t_1)} -$$

$$-\frac{1}{(1-t_2)}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,1)\,d\tau_1}{(\tau_1-t_1)} + \frac{1}{(-1-t_1)}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_2}(-1,\tau_2)\,d\tau_2}{(\tau_2-t_2)} - \frac{1}{(1-t_1)}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_2}(1,\tau_2)\,d\tau_2}{(\tau_2-t_2)} +$$

$$+\frac{\varphi(-1,-1)}{(-1-t_1)(-1-t_2)} - \frac{\varphi(1,1)}{(1-t_1)(1-t_2)}.$$

Оценка погрешности кубатурной формулы (3.3.2) имеет вид

$$\left|R_{N_1N_2}\right| \le \left| \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^2(\tau_2-t_2)^2} - \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2} + \right.\right.$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2} +$$

$$\left.\left. +\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2} + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2} \right]\right| +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \left[\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2} + \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2} + \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)-\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2})}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2} \right] d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\left\{ \left(\varphi(t'_{k_1},t'_{k_2}) - \tilde{\varphi}(t'_{k_1},t'_{k_2})\right) \int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_k+1}} \left[\frac{1}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2} + \right.\right.\right.$$

$$+\frac{1}{(\tau_1-t_1+ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2} + \frac{1}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2+ih)^2} +$$

$$\left.\left.\left. +\frac{1}{(\tau_1-t_1-ih)^2(\tau_2-t_2-ih)^2} \right] d\tau_1 d\tau_2 \right\}\right| + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} R_{ij}.$$

Оценим по одному слагаемому из каждой группы. Вначале оценим R_{i1} (выражения R_{i1}, $i=2,3,4$ оцениваются аналогично). Нетрудно видеть, что $R_{11} \le R_{111} + R_{112} + R_{113}$, где

$$R_{111} = \left| \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(1,1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)} - \frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(1,1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)(\tau_2-t_2+ih)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(1,1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1+ih)(\tau_2-t_2-ih)} + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(1,1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)(\tau_2-t_2+ih)} + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(1,1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1-ih)(\tau_2-t_2-ih)} \right]\right|;$$

$$R_{112} = \left| \frac{1}{-1-t_2}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1}d\tau_1 - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{-1-t_2+ih}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1+ih}d\tau_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{-1-t_2-ih}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1+ih}d\tau_1 + \frac{1}{-1-t_2+ih}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1-ih}d\tau_1 + \frac{1}{-1-t_2+ih}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1)}{\tau_1-t_1+ih}d\tau_1 \right]\right|;$$

$$R_{113} = |\varphi(1,1)| \left| \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1-t_1+ih)(1-t_2+ih)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{(1-t_1+ih)(1-t_2-ih)} + \frac{1}{(1-t_1-ih)(1-t_2+ih)} + \frac{1}{(1-t_1-ih)(1-t_2-ih)} \right]\right|.$$

Зафиксируем $\Delta > 0$. Будем считать, что $h \ll \Delta$; $-1+\Delta \le t_1, t_2 \le 1-\Delta$. При этих предположениях

$$R_{111} = h^2 \left| \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \varphi^{(1,1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2) \frac{[(\tau_1-t_1)^2+(\tau_2-t_2)^2+h^2]d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)\left[(\tau_1-t_1)^2+h^2\right]\left[(\tau_2-t_2)^2+h^2\right]} \right| \le O\left(h^2 \ln h\right).$$

Выражение R_{112} состоит из четырех слагаемых. Оценим одно из них (остальные оцениваются аналогично):

$$\left| \int_{-1}^{1} \varphi'_{\tau_1}(\tau_1,-1) \left\{ \frac{1}{(-1-t_2)(\tau_1-t_1)} - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(-1-t_2+ih)(\tau_1-t_1+ih)} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{1}{(-1-t_2-ih)(\tau_1-t_1+ih)} + \frac{1}{(-1-t_2+ih)(\tau_1-t_1-ih)} + \frac{1}{(-1-t_2-ih)(\tau_1-t_1-ih)} \right]\right\} d\tau_1 \right| \le$$

$$\le h^2 A \left| \frac{1}{|-1-t_2|\left[(-1-t_2)^2+h^2\right]} \int_{-1}^{1} \frac{|\tau_1-t_1|}{(\tau_1-t_1)^2+h^2} d\tau_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{|-1-t_2|} \int_{-1}^{1} \frac{d\tau_1}{(\tau_1-t_1)\left[(\tau_1-t_1)^2+h^2\right]} \right| = O\left(h^2 \ln h\right).$$

Выражение R_{113} состоит из двух слагаемых. Оценим одно из них (второе слагаемое оценивается аналогично)

$$|\varphi(1,1)| \left| \frac{1}{(1-t_1)(1-t_2)} - \frac{1-t_1-t_2+t_1t_2}{\left[(1-t_1)^2+h^2\right]\left[(1-t_2)^2+h^2\right]} \right| \le O\left(h^2\right).$$

Отметим, что все эти оценки получены в предположении, что $-1+\Delta \le t_1, t_2 \le 1-\Delta$, где Δ- постоянная. Из полученных оценок следует:

$$\left|R_{11}\right| \le O\left(h^2 \ln h\right).$$

Оценим выражение R_{21} (выражения $R_{2i}, i=2,3,4,$ оцениваются аналогично)

$$\left|R_{21}\right| \le \left|\frac{1}{4}\left[\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1 + ih)^2 (\tau_2 - t_2 + ih)^2} - \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} \varphi\left(t'_{k_1}, t'_{k_2}\right) \int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1 + ih)^2 (\tau_2 - t_2 + ih)^2}\right]\right| \le$$

$$\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{\left|\varphi(\tau_1,\tau_2) - \varphi\left(t'_{k_1}, t'_{k_2}\right)\right| d\tau_1 d\tau_2}{\left|\tau_1 - t_1 + ih\right|^2 \left|\tau_2 - t_2 + ih\right|^2}\right| \le$$

$$\le \frac{A}{4N}\left(\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}} \frac{d\tau_1}{(\tau_1 - t_1)^2 + h^2}\right)\cdot\left(\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{d\tau_2}{(\tau_2 - t_2)^2 + h^2}\right) = O\left(\frac{1}{Nh^2}\right).$$

Оценим выражение R_{31} ($R_{3i}, i=2,3,4,$ оцениваются аналогично)

$$\left|R_{31}\right| \le \sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\left|\varphi\left(t'_{k_1}, t'_{k_2}\right) - \tilde{\varphi}\left(t'_{k_1}, t'_{k_2}\right)\right| \left|\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\left|(\tau_1 - t_1 + ih)^2 (\tau_2 - t_2 + ih)^2\right|}\right| = O\left(\varepsilon / h^2\right).$$

Собирая вместе оценки выражений $R_{ij}, i=1,2,3, j=1,2,3,4,$ убеждаемся в справедливости теоремы.

3.4. Кубатурные формулы для вычисления интеграла Адамара на топологическом произведении двух бесконечных контуров

Рассмотрим интеграл Адамара

$$A\varphi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^2(\tau_2-t_2)^2}. \qquad (3.4.1)$$

Функция $\varphi(\tau_1,\tau_2)$ имеет производные до r_1-го порядка по переменной τ_1 и r_2-го порядка по переменной τ_2: $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in W^{r_1 r_2}(1)$.

Предположим, что эта функция представима в виде $\varphi(\tau_1,\tau_2)=\rho_i(\tau_1,\tau_2)\psi(\tau_1,\tau_2)$, где ρ_i- весовые функции. В качестве весовых используются следующие функции:

$$\rho_1(\tau_1,\tau_2)=a^{-|\tau_1|-|\tau_2|}\ \textit{при}\ a>1; \quad \rho_2(\tau_1,\tau_2)=e^{-\tau_1^2-\tau_2^2}.$$

Через $W^{r_1 r_2}(1,K)$ обозначим класс функций $\varphi(\tau_1,\tau_2)$, определенных на области $(-\infty,\infty)^2$, имеющих непрерывные производные до (r_1-1)-го порядка по переменной τ_1 и (r_2-1)-го по переменной τ_2, кусочно-непрерывные производные порядка r_1 по переменной τ_1 и порядка r_2 по переменной τ_2 и удовлетворяющих условиям:

$$\max\left|\varphi^{(r_1,r_2)}(\tau_1,\tau_2)\right|\le 1; \quad \max\left(\left|\varphi(\tau_1,\tau_2)\right|,\left|\varphi'_{\tau_1}(\tau_1,\tau_2)\right|,\left|\varphi'_{\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\right|,\ldots,\left|\varphi^{(r_1-1,r_2-1)}_{\tau_1\tau_2}(\tau_1,\tau_2)\right|\right)\le K.$$

Введем обозначения: N_k^1, N_k^2 - целые числа;

$$\tau_{k,l}^{1}=k_1+{l_1}\Big/{N_{k_1}^{1}}\,;\,k_1=-A_1,\ldots,-1,0,1,\ldots,A_1;\,l_1=0,1,\ldots,N_{k_1}^{1};$$

$$\tau_{k,l}^{2}=k_2+{l_2}\Big/{N_{k_2}^{2}}\,;\,k_2=-A_2,\ldots,-1,0,1,\ldots,A_2;\,l_2=0,1,\ldots,N_{k_2}^{2}.$$

Значения A_i зависят от весовой функции $\rho(\tau_1,\tau_2)$:

$$A_i=\begin{cases}[r_1\log_a N_i] & \textit{при}\ \rho(\tau_1,\tau_2)=a^{-|\tau_1|-|\tau_2|};\\ [\ln N_i] & \textit{при}\ \rho(\tau_1,\tau_2)=e^{-\tau_1^2-\tau_2^2}.\end{cases}$$

Значения N_k^i также зависят от весовой функции: если весовая функция $\rho(\tau_1,\tau_2)=a^{-|\tau_1|-|\tau_2|}$, то $N_k^i={N}\big/{a^{kr_i}}$; если $\rho(\tau_1,\tau_2)=e^{-\tau_1^2-\tau_2^2}$, то $N_k^i={N}\Big/{\exp\left({k^2}\big/{r_i}\right)}$, $i=1,2.$

Теорема 3.4.1. Пусть $\varphi(\tau_1,\tau_2)\in W^{r_1r_2}(1)$ и $\left|\varphi(\tau_1,\tau_2)-\tilde{\varphi}(\tau_1,\tau_2)\right|\le\varepsilon$. Тогда для интеграла Адамара (3.4.1) кубатурная формула

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=\frac{1}{4}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1}\tilde{\varphi}\left(t'_{k_1},t'_{k_2}\right)\int_{t_{k_1}}^{t_{k_1+1}}\int_{t_{k_2}}^{t_{k_2+1}}\left[\frac{1}{(\tau_1-t_1+ih)^{p_1}(\tau_2-t_2+ih)^{p_2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{(\tau_1-t_1-ih)^{p_1}(\tau_2-t_2+ih)^{p_2}}+\frac{1}{(\tau_1-t_1+ih)^{p_1}(\tau_2-t_2-ih)^{p_2}}+$$

$$\left.+\frac{1}{(\tau_1-t_1-ih)^{p_1}(\tau_2-t_2-ih)^{p_2}}\right]d\tau_1d\tau_2+R_{N_1N_2} \qquad (3.4.2)$$

при $p_1 = p_2 = 2$ имеет погрешность

$$\left|R_{N_1N_2}\right| = O\left(h_1^{1/2} h_2^{1/2} \left|\ln h_1\right|\left|\ln h_2\right| + \varepsilon / h_1 h_2 + 1/N \, h_1 h_2 \right).$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим интеграл Адамара (3.4.1) в предположении, что

$$\lim_{\substack{\tau_1 \to \pm\infty \\ \tau_2 \to \pm\infty}} \varphi_{\tau_1\tau_2}^{(i,j)}\left(\tau_1, \tau_2\right) = 0, \quad 0 \le i, j \le p-1.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1 - t_1)^{p_1}(\tau_2 - t_2)^{p_2}} = \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)(\tau_2-t_2)}. \qquad (3.4.3)$$

Интегрируя по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1 - (t_1 - ih_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2 - (t_2 - ih_2)\right]^{p_2}} = \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih)\right]};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1 - (t_1 - ih_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2 - (t_2 + ih_2)\right]^{p_2}} = \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2+ih)\right]};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1 - (t_1 + ih_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2 - (t_2 - ih_2)\right]^{p_2}} = \frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1+ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih)\right]};$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1+ih_1)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2+ih_2)\right]^{p_2}}=\frac{1}{(p_1-1)!(p_2-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1+ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2+ih)\right]}. \tag{3.4.4}$$

Из формул (3.4.3) и (3.4.4) следует

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{(\tau_1-t_1)^{p_1}(\tau_2-t_2)^{p_2}}=\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-(t_1-i\eta)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2-i\eta)\right]^{p_2}}+\right.$$

$$+\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-(t_1-i\eta)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2+i\eta)\right]^{p_2}}+\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-(t_1+i\eta)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2-i\eta)\right]^{p_2}}+$$

$$\left.+\frac{\varphi(\tau_1,\tau_2)}{\left[\tau_1-(t_1+i\eta)\right]^{p_1}\left[\tau_2-(t_2+i\eta)\right]^{p_2}}\right]d\tau_1 d\tau_2.$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}=$$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,\tau_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,\tau_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,t_2)+\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2 +
$$

$$
+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,\tau_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2 +
$$

$$
+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,t_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2 +
$$

$$
+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2 = I_1+I_2+I_3+I_4.
$$

Второй, третий и четвертый интегралы вычисляются по формуле Коши:

$$
I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,\tau_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2 =
$$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,\tau_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_2 \bullet \begin{cases} \pi i, \text{ если } t_1-ih_1 \text{ лежит в верхней полуплоскости;} \\ -\pi i, \text{ если } t_1-ih_1 \text{ лежит в нижней полуплоскости.} \end{cases}
$$

$$I_3=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,t_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(\tau_1,t_2)-\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]}d\tau_1\bullet\begin{cases}\pi i,\ \textit{если } t_2-ih_2 \textit{ лежит в верхней полуплоскости};\\ -\pi i,\ \textit{если } t_2-ih_2 \textit{ лежит в нижней полуплоскости}.\end{cases}$$

$$I_4=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)}{\left[\tau_1-(t_1-ih_1)\right]\left[\tau_2-(t_2-ih_2)\right]}d\tau_1 d\tau_2=$$

$$=\varphi_{\tau_1\tau_2}^{(p_1-1,p_2-1)}(t_1,t_2)\bullet\begin{cases}-\pi^2,\ \textit{если обе точки } (t_1-ih_1) \textit{ и } (t_2-ih_2) \textit{ лежат или в верхних}\\ \textit{или в нижних полуплоскостях соответствующих плоскостей};\\ \pi^2,\ \textit{если одна из точек } (t_1-ih_1) \textit{ или } (t_2-ih_2) \textit{ лежат в верхней}\\ \textit{полуплоскости, а вторая} - \textit{в нижней полуплоскости}.\end{cases}$$

Оценка погрешности кубатурной формулы (3.4.2) имеет вид

$$\left|R_{N_1N_2}\right|=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}r_{ij},$$

где слагаемые r_{ij} имеют тот же вид, что и в пункте 3.2 с заменой интегрирования по конечным областям интегрированием по бесконечным областям. Оценка погрешности $\left|R_{N_1N_2}\right|$ складывается из суммы трех групп слагаемых. Каждая группа состоит из четырех слагаемых. Повторяя рассуждения, приведенные в пункте 3.2, получаем

$$\left|R_{N_1N_2}\right|=O\left(h_1^{1/2}h_2^{1/2}\left|\ln h_1\right|\left|\ln h_2\right|+\varepsilon/_{h_1h_2}+1/_{N}\,h_1h_2\right).$$

Таким образом, оценка погрешности кубатурной формулы на топологическом произведении двух бесконечных контуров является бесконечно малой величиной высшего порядка.

Заключение

Точное вычисление интегралов Адамара возможно только в исключительных случаях. В учебном пособии описаны приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений, необходимые дл решения различных физических и технических задач.

Список литературы

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа./ Ж.Адамар. – М.: Наука, 1978. -351с.
2. Бахвалов Н.С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики.// Вычислит. матем. и матем. физика.- 1970. – Т.11. № 3. – С. 555-568.
3. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М. : Наука. 1965. -244с.

4. Бойков И.В. Оптимальные методы приближенного вычисления интегралов и приближенное решение интегральных уравнений: Учебн. пособие. Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1981.-105с.

5. Бойков И.В. О некоторых оптимальных по точности алгоритмахвычисления трансформации гравитационных аномалий// Решение прямой и обратной задач гравиметрии и магнитометрии (Вопросы теории и методики) –М.:Ин-т физики Земли АН СССР,1985.-С. 226-238.

6. Бойков И.В. Оптимальные по точности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов. –Саратов.: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 1983. -210с.

7. Бойков И.В. Оптимальные методы вычислений в задачах автоматического регулирования: учебное пособие. –Пенза: Пенз. политехн. Ин-т, 1983. -96с.

8. Бойков И.В. Пассивные и адаптивные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов. –Ч.1.-Пенза: Изд-во ПГТУ, 1995.-214с.

9. Бойков И.В. Пассивные и адаптивные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов. –Ч.2.-Пенза: Изд-во ПГТУ, 1995.-128 с.

10. Бойков И.В. Асимптотически оптимальные квадратурные формулы вычисления интегралов Адамара с фиксированной особенностью/ И.В.Бойков, Н.Ф.Добрынина //Применение вычислительных методов в научно-технических исследованиях: межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1984.- Вып. 6. –С. 11-24.

11. Бойков И.В. Об оптимальных по точности алгоритмах вычисления интегралов Адамара./ И.В.Бойков, Н.Ф. Добрынина //Оптимальные методы вычисления и их применение: мевуз. сб. науч. тр.-Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1985.-Вып.7.-С.14-28.

12. Бойков И.В. О приближенных методах вычисления интегралов Адамара / И.В.Бойков, Н.Ф.Добрынина, Л.Н.Домнин // Механика машиностроения: тез. докл. 2 республ. науч.-техн. конф. –Набережные Челны, 1987.-С.57.

13. Бойков И.В. Эффективный метод вычисления интегралов Адамара / И.В. Бойков, Н.Ф.Добрынина, Л.Н.Домнин; Пенз. политехн. ин-т.- Пенза. 1988.-13с.- Деп. в ВИНИТИ 14.10.88, № 7429 – В88.

14. Бойков И.В.. Эффективный метод вычисления двойных интегралов Адамара / И.В.Бойков, Н.Ф.Добрынина; Пенз. политехн. ин-т.- Пенза. 1989.-19с.-Деп. в ВИНИТИ 10.05.89, № 3011 – В89.

15. Бойков И.В. Весовые квадратурные формулы для интегралов Адамара / И.В.Бойков, Н.Ф.Добрынина; Пенз. политехн. ин-т.- Пенза. 1989.-7с.-Деп. в ВИНИТИ 19.01.90, № 424 – В90.

16. Бойков И.В. Приближенные методы вычисления интегралов Адамара и решения гиперсингулярных интегральных уравнений / И.В.Бойков, Н.Ф.Добрынина, Л.Н.Домнин. – Пенза.: Из-во Пенз. гос.технич. ун-та. -1996.-187с.
17. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. –М.: ГИФМЛ, -1958. -439с.
18. Добрынина Н.Ф. Оптимальные квадратурные формулы для вычисления интегралов Адамара / Н.Ф. Добрынина // Оптимальные методы вычислений и их применение: межвуз. сб. науч. тр.-Пенза: Пенз. политехн. ин-т. 1983. Вып.5.- С.25-35.

19.Добрынина Н.Ф. О вычислительных программных модулях для некоторых интегралов Адамара / Н.Ф.Добрынина, Л.Н.Домнин // Оптимальные методы вычислений и их применение: межвуз. сб. науч. тр.-Пенза: Пенз. политехн. ин-т. 1987. Вып.8.- С.46-50.
20.Добрынина Н.Ф. О приближенных методах вычисления интегралов Адамара / Н.Ф.Добрынина, Л.Н.Домнин // Оптимальные методы вычислений и их применение к обработке информации: межвуз. сб. науч. тр.-Пенза: Пенз. политехн. ин-т. 1990. Вып.9.- С.24-29.
21.Ioakimidis N.I. Application of finite-part integrals to the singular equations of crack problems in plane and three-dimensional elasticity / N.I.Ioakimidis // Acta Mechanika. – 1982.-V.45. –P.31-47.
22.Ioakimidis N.I. On the validity of the singular integral equations of crack problem at the crack tips / N.I. Ioakimidis //Acta Mechanika. – 1989.-V.48. –P.185-191.
23.Крылов В.И. Приближенные методы вычисления интегралов. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 327с.
24.Лифанов И.К. Численное решение сингулярных интегральных уравнений Гильберта с сильной особенностью / И.К. Лифанов//Оптимальные методы вычислений и их применение: Межвуз. сб. науч.тр.- Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1985. – Вып. 7. –С. 38-45.
25.Лифанов И.К. О методе дискретных вихрей / И.К.Лифанов// ПММ.-1979. Т. 43. № 1. –С. 184-188.
26.Лифанов И.К. О методе дискретных вихрей для крыла бесконечного размаха и уравнении Прандтля для крыла конечного размаха / И.К.Лифанов// Изв. Вузов. Математика. -1980. № 6. –С. 44-51.
27.Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент / И.К.Лифанов. М.: ТОО «Янус».1995.-520с.
28.Лифанов И.К. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков / И.К.Лифанов, А.Ф.Матвеев //Теория функций, функциональный анализ и их приложения. -1983. Вып.30.-С.104-110.

29.Лифанов И.К. Обоснование численного метода дискретных вихрей решения сингулярных интегральных уравнений / И.К.Лифанов, Я.Е.Полонский// ПММ.-1975. -Т.39. № 4.-С. 742 – 746.

30.Маковоз Ю.И. Об оценке погрешности квадратурной формулы для сингулярных интегралов / И.Ю. Маковоз, М.А.Шешко// Минск: Изв.АН БССР. –Сер. физ.-мат. наук. -1977. № 6. –С. 36 – 41.

31.Моторный В.П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В.П. Моторный //Изв. АН СССР. Математ. серия. -1974. -№ 3. –С.583-614.

32.Натансон И.П. Конструктивная теория функций./ И.П. Натансон - М.,Л.: ГИФМЛ, 1949. – 688с.

33.Некрасов А.И. Теория крыла в нестационарном потоке / А.А.Некрасов. –М.: Изд-во АН СССР. 1947. –С. 3-65.

34.Никольский С.М. Квадратурные формулы./ С.М.Никольский. – М.: Наука. 1979.-254с.

35.Половинкин В.И. Весовые кубатурные формулы/ В.И.Половинкин// ДАН СССР. -1968. –Т. 179. № 3. –С. 543-544.

36.Половинкин В.И. Некоторые оценки норм функционалов ошибок кубатурных формул / В.И.Половинкин // Математические заметки.-1969.-Т. 5. № 3.-С. 317-322.

37.Половинкин В.И. Некоторые вопросы теории весовых кубатурных формул / В.И.Половинкин // Сибир. математ. журнал. -1971. –Т. 12. №1. –С. 177-196.

38.Половинкин В.И. Составные кубатурные формулы / В.И.Половинкин//. Вопросы вычислительной и прикладной математики: сб. Ташкент:. Изд-во «Фан». 1972.- №14.- С. 17-25.

39.Половинкин В.И. О кубатурных формулах с регулярным пограничным слоем/ И.В.Половинкин//Сибир. матем. журнал. -1972.- Т. 13.-№ 4.- С. 951-954.

40.Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул./ С.Л.Соболев.- М.: Наука. ГИФМЛ, 1974.- 808с.

41. Тихомиров В.М. Поперечники множеств в функциональных пространствах теории наилучших приближений/В.М.Тихомиров// УМН.-1960.- Т. 15.- № 3. - С. 81-120.

42. Чикин Л.А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений/ Л.А.Чикин// Уч. записки Казан. гос. ун-та.- Казань, 1953. - Т. 113.- № 10.- С. 57-106.

43. Winer K. Uber die Losiing nichtlineearer Integralgleichungen mit Yadamard-Integralen / K. Winer// Math. Nachrishten.- 1968.-V.36.- N 5-6.- J. 289-309.

44. Winer K. Uber die Losiing der Integralgleichung von Romanovsky mit der Metode der lanfenden Funkstionalkorrekturen / K.Winer//Univ. Halle-Wittenberg. Math. Nachrishten. -1969.-V.18.- N 6.- J. 787-789.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Бойков Илья Владимирович

Добрынина Наталия Филипповна

Приближенные методы вычисления интегралов Адамара

Учебное пособие

Редактор *Т. В .Веденеева*
Технический редактор *Н. А . Вьялкова*
Корректор *С .Н. Сухова*
Компьютерная верстка *Р.Б. Бердниковой*

ИД № 06494 от 26.12.01
Сдано в производство 20.03.07. Формат $60 \times 84\,{}^{1}\!/_{16.}$
Бумага писчая. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,25.
Уч. –изд.д.7.49. Тираж 100. Заказ № 186. «С» 31.

Издательство Пензенского государственного университета.
440026, Пенза, Красная,40.